

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

49e jaargang
1973/1974
no 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 21,50. Hiervoor wende men zich tot:

Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

EUCLIDES

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleraren en van de
Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

49ste jaargang 1973/1974

Wolters-Noordhoff bv Groningen

INHOUD VAN DE 49STE JAARGANG 1973/1974

ARTIKELEN EN VOORDRACHTEN

KORRELS

ZO DOE IK HET

DIVERSEN

RAPPORTEN EN VERSLAGEN

BOEKBESPREKINGEN

In memoriam

Dr J.K. VAN DER BRIEL †

Op 25 mei is onze voorzitter, Jan Kees van den Briel, plotseling overleden. In 1969 nam hij het voorzitterschap op zich. Wat hij sindsdien voor onze vereniging en meer algemeen voor het wiskunde-onderwijs gedaan heeft, is ontzettend veel, en, zoals we thans helaas weten, te veel. Onze vereniging heeft hij op een voortreffelijke manier geleid. Hij was niet alleen algemeen voorzitter, maar nam ook verschillende deeltaken op zich.
Daarnaast wijdde hij als lid van het dagelijks bestuur van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde ook buiten het kader van de vereniging zijn krachten aan de verbetering van het wiskunde-onderwijs. Wie weet, dat hij bovendien gemeenteraadslid, en zelfs fractievoorzitter was, begrijpt niet meer hoe één man al dit werk kon verzetten.
Jan Kees was niet alleen een bekwaam en werkzaam mens. Hij was, en dat is van veel groter belang, een goed mens en een goede vriend. Ieder trad hij rustig en plezierig tegemoet. Wie met hem in persoonlijk contact kwam, voelde dat hij tegenover een gave persoonlijkheid stond.
Het spreekt haast vanzelf dat op dit moment mijn gedachten in de eerste plaats uitgaan naar zijn vrouw, die voor hem een trouwe en waardevolle metgezellin was. Ik hoop dat ze troost zal vinden in de wetenschap dat velen met grote waardering terugdenken aan de persoon Jan Kees en met groot respect aan de wijze waarop hij zijn vele taken volbracht.

Piet Vredenduin

De zogenaamde 'nieuwere meetkunde' in de wiskundeprogramma's van de hbs Een terugblik

Dr. Joh. H. WANSINK

Arnhem

1. *De oudste voorschriften*

Een gedetailleerd leerplan voor meetkunde heeft de hbs in de eerste halve eeuw van zijn bestaan niet gekend. Na de totstandkoming van het zogenaamde *Normaalprogramma voor de Rijkshogereburgerscholen* in 1916 zouden eerst de programmaherzieningen van 1937 en 1958 op enigszins bevredigende wijze houvast geven ten aanzien van de vraag welke onderwerpen er nu eigenlijk onderwezen dienden te worden en in welke omvang.

Toch had de wiskunde bij het totstandkomen van de hbs ten aanzien van de leerstofomschrijving een bijzondere plaats ingenomen in de rij van de wettelijk voorgeschreven leervakken. Terwijl de wet van 1863 overigens volstaan had met het geven van een opsomming van de namen van de te onderwijzen vakken werden er voor de wiskunde en voor de wiskunde alleen in de Memorie van Toelichting nadere details verstrekt.

We lezen daar het volgende:

Het onderwijs der wiskunde aan de volledige hogereburgerschool zal kunnen omvatten:
1 de rekenkunde voorzover die niet op de lagere school behandeld is;
2 de stelkunde tot en met de vergelijkingen waarin de onbekende tot de tweede macht voorkomt, met inbegrip van de rekenkundige en de meetkundige reeksen en van het binomium van Newton;
3 de gewone lagere meetkunde tot en met de stereometrie;
4 de beginselen der beschrijvende meetkunde tot aan de gebogen vlakken.

De bijzondere plaats van de wiskunde op het nieuwe schooltype werd voorts tot uitdrukking gebracht door dit vak als eerste te laten prijken in de lijst van de 14 te onderwijzen vakken.

Wat ons in de gegeven detaillering allereerst opvalt is het feit dat de opstellers blijkbaar een vast leerstofstramien voor ogen moeten hebben gehad. Alleen daardoor toch kon een clausule als 'tot en met de stereometrie' in eerste instantie een voldoend nauwkeurige afbakening van de leerstof betekenen.

Dat dit mogelijk was is ongetwijfeld te danken geweest aan het gezag dat de *Elementen van Euclides* uit de vierde eeuw voor Chr. in de negentiende eeuw in school en wetenschap nog bezaten.

2 *Meetkundeboeken in gebruik in de eerste helft van de negentiende eeuw*

De meest gezaghebbende auteurs hier te lande in de eerste helft van de negentiende eeuw waren Jacob de Gelder (1765–1848) en Jan Hendrik van Swinden (1746–1823), terwijl in Zuid-Nederland A.M. Legendre (1752–1833) het meest op de voorgrond trad.

Van Gelder schreef in 1810 zijn *Beginselen der Meetkunde*, Van Swinden in 1790 zijn *Grondbeginsels der Meetkunde*, een werk van hoog niveau dat door Jacobi (C.F.A.) in het Duits zou worden vertaald (1834). Van Swinden heeft in zijn boek de methode van de Grieken uitgebreid met veel wat aan latere eeuwen was ontleend. Het boek van Legendre heeft op het franstalige onderwijs grote invloed uitgeoefend, groter dan met enig ander leerboek het geval is geweest.

Legendre heeft er stelselmatig naar gestreefd Euclides' werk te verbeteren o.a. ten opzichte van het befaamde parallellenpostulaat, echter zonder blijvend succes. Hij kreeg de naam van 'de tweede Euclides'. Ondanks alle verbeteringen door hem voorgesteld bleef de overeenstemming met het systeem van Euclides zo groot, dat alle bezwaren die men tegen Euclides aanvoert onverminderd ook tegen Legendre kunnen worden ingebracht.

Jacob de Gelder's oeuvre bleef een halve eeuw lang het wiskunde-onderwijs in ons land beheersen, maar naast hem verschenen er uiteraard tal van andere, naast leerboekschrijvers ook auteurs van vraagstukkenverzamelingen. We noemen als voorbeelden Badon Ghyben, Strootman, Kempees. Een bekend auteur van een vraagstukkenverzameling was voorts de Barneveldse instituteur Kapteyn, vader van de hoogleraren W. Kapteyn en J.C. Kapteyn.

De vereniging van ons land met België maakt het begrijpelijk dat Franse boeken in vertaling ook hier hun invloed gingen uitoefenen.

We noemen in dit verband de werken van Lacroix, van Falisse en Graindorge.

Uit een vorige periode stamde nog de vertaling van de *Elémens* de *Géométrie* en van de *Elémens d'Algèbre* van Clairaut door Strabbe, wiens naam we hier willen noemen omdat aan zijn initiatieven de totstandkoming van ons *Wiskundig Genootschap* te danken is geweest.

Over het niveau van het wiskunde-onderwijs in de periode voorafgaande aan de oprichting van de hogereburgerscholen, dat is dus van het onderwijs op de Latijnse scholen en de Franse scholen, citeren we een oordeel van de latere inspecteur Steyn Parvé uit 1850. Omdat ik de oorspronkelijke Nederlandse brochure niet heb kunnen inzien, volsta ik met een citaat uit een vertaling van Cardinaal uit 1900, opgenomen in het tijdschrift *Enseignement Mathématique*.

> La méthode d'enseignement: celle-ci était souvent défectueuse, ce dont on n'a pas à s'étonner; au lieu de faire comprendre la liaison organique des théorèmes de géométrie, au lieu de former et de développer l'indépendance du jugement des élèves, on leur faisait souvent apprendre par coeur les démonstrations des théorèmes et on les forçait à une reproduction pénible et machinale de la démonstration du professeur.

3 *De eindexamenvoorschriften van 1868*

Het ontbreken van een gedetailleerd leerplan voor wiskunde heeft tot gevolg gehad dat de in 1868 verschenen *Voorschriften betreffende het eindexamen der hogere-*

burgerscholen voor de onderwijspraktijk van beslissende betekenis beloofden te worden. De in deze voorschriften vervatte eisen zouden worden overgenomen in het *Reglement voor de eindexamens der hogereburgerscholen* dat bij Koninklijk Besluit in maart 1870 tot stand kwam.
Voor wat de meetkunde betreft ontlenen we aan die voorschriften het volgende.

De in de meetkunde gevorderde kennis strekt zich uit tot de inhoudsvinding van de veelvlakkige lichamen, van de cilinder, de kegel en de bol, de geometrische eigenschappen van de bolvormige driehoek en de leerstukken van de meetkunde der ruimte en van het platte vlak die hieraan voorafgaan.
De kandidaat heeft het bewijs te leveren, dat hij een duidelijk begrip heeft van de eisen van een wiskundig betoog en van het onderling verband van de onderscheidene leerstukken.
Enige kennis van de harmonische snijding, de transversalen en de gelijkvormigheidspunten strekt tot aanbeveling.

We kunnen hier een analoge opmerking maken als in de eerste paragraaf: door een uitdrukking als 'tot de inhoudsvinding' tracht men een cesuur aan te brengen in een blijkbaar bekend ondersteld systeem. De laatste alinea, die we cursiveerden, heeft het karakter van een Fremdkörper in de gegeven stofomschrijving. Het gaat daar om onderwerpen die niet schijnen te behoren binnen het bekend ondersteld e geheel. Deze alinea wijst heen naar wat in ons onderwijs bekend was of bekend zou worden als 'nieuwere meetkunde'. De in deze alinea gestelde eisen missen echter het categorisch karakter van de voorafgaande.

Wat is nu de achtergrond van de gecursiveerde alinea, wat wilde men met die nieuwe leerstof bereiken en hoe heeft de nieuwe leerstof in het meetkunde-onderwijs van de hogereburgerschool gefunctioneerd?

4 *Aard en oorsprong van de 'nieuwere meetkunde'*
Harmonische snijding, transversalen en gelijkvormigheidspunten zijn alle drie onderwerpen, waarvan we de opname in Nederlandse voorschriften aan Franse invloeden mogen toeschrijven. Het zijn onderwerpen uit die 'nieuwe meetkunde' die in de eerste helft van de negentiende eeuw in Frankrijk onder invloed van Poncelet, Chasles e.a., in Duitsland door het werk van o.a. Steiner en Staudt tot stand kwam.
Op zichzelf beschouwd zeggen adjectieven als 'nieuw, nieuwer, nieuwst' ons maar heel weinig. Ze kunnen tijdelijk dienst doen als een reclame-etiket, maar dreigen spoedig kleurloos te worden. Slechts gedurende betrekkelijk korte tijd zijn ze in staat voldoende duidelijk aan te geven wat er in een bepaalde context eigenlijk mee bedoeld wordt. De ontwikkeling van de wetenschap gaat zo snel, dat nieuwe onderwerpen, nieuwe theorieën na betrekkelijk korte tijd hun glans van nieuwheid kunnen verliezen. Als ze eenmaal in de schoolwereld binnendringen is die glans van wetenschappelijke nieuwheid stellig wel verdwenen.
Hoe hardnekkig een eenmaal gebruikte term zich echter kan handhaven zien we aan het lijvige werk van prof. dr. Fr. Schuh (1875–1966), dat in 1938 werd uitgegeven onder de titel *Leerboek der Nieuwere Meetkunde van het platte vlak en de ruimte,* waarin de auteur met een degelijkheid en uitvoerigheid die al zijn

werken kenmerkt alle 'nieuwe' onderwerpen bespreekt die in de loop van driekwart eeuw schoolmeetkunde voor studerenden voor een akte wiskunde van belang waren gebleken.
Een bijdrage tot vernieuwing van de schoolmeetkunde zelf is Schuh's boek echter niet geworden. De auteur spreekt weliswaar de hoop uit dat zijn boek ook voor de in ons vhmo werkzame leraren van nut kan zijn, maar beperkt zich bij de toelichting op deze doelstelling tot het opnoemen van de zo belangrijke begrippen als elementen in het oneindige en dualiteit.
In Schuh's boek komen de projectieve ideeën van Poncelet e.a. uitvoerig aan de orde, ook worden er wel een aantal meetkundige transformaties besproken, maar de structuur van de gehele meetkunde op de grondslag van Klein's theorie inzake transformatiegroepen blijft onbesproken. Klein's naam wordt trouwens in het gehele boek niet genoemd, noch diens Erlanger Programma. Voorstellen inzake de vernieuwing van de structuur van de gehele meetkunde in ons onderwijs komen in dit werk van Schuh dan ook niet aan de orde. Trouwens evenmin in zijn in 1940 verschenen *Didactiek en Methodiek van de wiskunde en de mechanica.*
Schuh's werk dient steeds gezien te worden in het licht van de betekenis die zijn leerboeken hadden voor studerenden voor vigerende programma's. Men krijgt de indruk dat het de auteur niet ging om hervorming van de verouderde programma's, maar alleen om degelijke behandeling van de bestaande. In verband hiermee is de tendens van het groots opgezette werk meer conservatief dan progressief te noemen. Een term als 'nieuwere meetkunde' die er voor werd gekozen was in 1938 in elk geval meer dan versleten.

Als promotor van de nieuwere meetkunde in het midden van de negentiende eeuw kan men in Frankrijk M. Chasles (1793–1860) beschouwen. Deze onderscheidde in 1839 drie soorten meetkunde:
de meetkunde van de Oudheid,
de analytische meetkunde van Descartes en Pascal,
de projectieve meetkunde van de negentiende eeuw van Poncelet e.a.

Chasles schreef in zijn *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837):

Cette troisième branche de la Géométrie, qui constitue aujourd'hui ce que nous appelons la Géometrie récente, est exempte de calculs algébriques quoiqu'elle fasse un heureux usage des relations métriques des figures que de leurs relations de situation; mais elle ne considère que des rapports de distances rectilignes d'un certain genre, qui n'exigent ni les symboles ni les opérations de l'Algèbre.
Cette Géométrie est la continuation de l'Analyse géométrique des Anciens, sur laquelle elle offre d'immenses avantages par la généralité et l'abstraction de ses méthodes, et par l'usage si utile de la contemplation des figures à trois dimensions dans les simples questions de Géométrie plane.

In Duitsland kreeg de naam *neuere Geometrie* burgerrecht, in Nederland de naam *'nieuwere meetkunde'.* In België werden de desbetreffende onderwerpen ondergebracht bij de *'compléments de géométrie'.*
Bij het propageren van de nieuwe ideeën is aanvankelijk en tijdelijk J. Versluys

(1843–1920) als pionier opgetreden. Zijn activiteiten die op de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in de tweede helft van de negentiende eeuw zo'n grote invloed zouden gaan uitoefenen, waren ook ten aanzien van de nieuwe onderwerpen van betekenis. Slechts een paar maanden na de publikatie van de examenvoorschriften van 1868 deed Versluys reeds een leerboekje verschijnen onder de titel *Beginselen der nieuwere meetkunde.* Hierin kwamen de volgende onderwerpen aan de orde:

a over de positieve en negatieve toestand van de meetkundige grootheden;
b transversalen;
c gelijkvormigheidspunten;
d machtlijnen;
e harmonische snijding;
f anharmonische snijding.

Drie van deze onderwerpen hadden hun plaats gevonden in de vermelde eindexamenvoorschriften. De formulering van deze, de keuze van Versluys en zijn wijze van behandeling doen het vermoeden rijzen dat er een gemeenschappelijke achtergrond moet zijn. Franse invloed lijkt onmiskenbaar. Voor wat Versluys zelf betreft zou die Franse invloed op den duur op voor hem pijnlijke wijze voor ieder komen vast te staan.

In 1897 verscheen de vijfde druk van Versluys' boekje. In de voorrede lezen we dat de bekende Parijse uitgever Gauthier-Villars bij advertentie bekend had gemaakt dat Versluys een op de configuratie van Pappus betrekking hebbende figuur zonder commentaar had overgenomen uit de *Traité de géométrie van Rouché et de Comberousse,* een leerboek dat in Nederland bij de opleiding voor de m.o.-akte K^I grote bekendheid had weten te verwerven.
Versluys erkent in 1897 de genoemde figuur en nog twee andere waarin de stellingen van Pascal en van Brianchon aan de orde komen inderdaad uit het Franse boek te hebben overgenomen, maar blijkt van oordeel dat zo'n overname als een onschuldige zaak mag worden beschouwd.
In Rouché et de Comberousse vinden we behandeld:
principe des signes ... transversales dans le triangle ... proportion harmonique ... définition générale de la similitude ... puissance d'un point par rapport à un cercle ... rapport anharmonique de quatre points en ligne droite.
De overeenkomst in structuur tussen het Franse werk en het werk van Versluys is opvallend. Versluys geeft dit toe voor de behandeling van Pascal en Brianchon, maar wijst er bij de openlijke erkenning van Franse beïnvloeding (hij noemt hierbij in het bijzonder Chasles) op, dat men ook verwantschap met Duitse auteurs (o.a. Baltzer) zou kunnen ontdekken.

5 *Hoe 'nieuw' was die 'nieuwere meetkunde?'*

a De stoot tot de nieuwere meetkunde in het begin van de negentiende eeuw was gegeven door Poncelet (1788–1867) wiens baanbrekend werk over projectieve meetkunde, de *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) in Russische krijgsgevangenschap was geconcipieerd. Doordat men hier te lande in het voort-

gezet onderwijs nimmer tot een behandeling van de meetkunde vanuit projectief standpunt is gekomen, ook niet na de verschijning van Klein's Erlanger Programma van 1872, bleef de behandeling van de 'nieuwere meetkunde' versnipperd over afzonderlijke onderwerpen.
Achteraf kan men het betreuren dat een herziening van het meetkundeprogramma in projectieve geest, waarbij dan de al te technisch georiënteerde beschrijvende meetkunde van de hbs voor die herstructurering in aanmerking zou hebben kunnen komen, nooit is overwogen.
In dit verband wijzen wij er nog op, dat in ons v.h.m.o. de perspectief nimmer in enig wiskundeprogramma werd opgenomen. De behandeling ervan zou immers dienstbaar gemaakt hebben kunnen worden aan een inleiding tot een 'projectivistische' behandeling van de meetkunde. Alleen bij de opleiding tot onderwijzer, dat is dus buiten ons v.h.m.o., werd eertijds een theoretische behandeling van de perspectief gegeven, maar de veelal gebrekkige wiskundige vorming bij de onderwijzersopleiding leidde ertoe dat de bijdrage die de perspectief daar tot de wiskundige vorming zou kunnen geven, niet veel te betekenen had.
b Door Möbius (1790–1868) werd in het begin van de eeuw (1827) voorgesteld aan daarvoor in aanmerking komende grootheden zoals lijnstukken en hoeken toestandstekens toe te kennen. Dit maakte het hem bijvoorbeeld mogelijk voor elk drietal collineaire punten A, B en C te schrijven

$$AB + BC = AC,$$

onverschillig in welke volgorde de drie punten gekozen worden.
c In de leer der transversalen treden de theorema's van Menelaus en de Ceva op de voorgrond, auteurs uit de eerste en de zeventiende eeuw van onze jaartelling.
d Het begrip macht van een punt ten opzichte van een cirkel is een begrip uit de negentiende eeuw. Het werd door de grote syntheticus Jacob Steiner (1796–1863) in zijn laatste levensjaar ingevoerd.
e Termen als stralenbundel en harmonische stralen dagtekenen uit de negentiende eeuw, maar de eigenschappen van de harmonische ligging zijn terug te voeren tot de derde eeuw na Christus (Pappus), misschien zelfs tot Euclides. Ook de volledige vierzijde en de volledige vierhoek die in de 'nieuwere meetkunde' een belangrijke plaats innamen, gaan terug op Pappus.
f Door het reeds genoemde werk van Van Swinden in de Duitse vertaling van Jacobi (1834) werden de stellingen van Pascal en Brianchon in principe tot onderwerpen van de schoolmeetkunde gemaakt. Inderdaad zou in zo'n vernieuwde schoolmeetkunde de van 1640 daterende stelling inzake de zeshoek (hexagrammum mysticum) een belangrijke plaats kunnen innemen in verband met de vele stellingen die er projectief ook op intuïtieve wijze uit kunnen worden afgeleid.

6 *De 'nieuwere meetkunde' in de schoolpraktijk in Nederland*
De voorschriften van 1868 zijn voor wat de vermelde onderwerpen uit de nieuwere meetkunde betreft vrijwel een dode letter gebleven. Incorporatie in de gangbare leerboeken voor de meetkunde kwam niet algemeen tot stand. Zelfs Versluys liet

hier verstek gaan. Ondanks het feit dat hij zijn boekje van 1868 in de eerste plaats bestemd had voor leerlingen van hogereburgerscholen, bleven de erin behandelde onderwerpen buiten zijn eigen schoolboeken. Noch in zijn *Leerboek der Vlakke Meetkunde,* noch in zijn *Nieuw leerboek der vlakke meetkunde* treffen we ze aan. De betekenis van Versluys' boekje van 1868, evenals de betekenis van de *Inleiding tot de nieuwere meetkunde van het platte vlak* van 1907, van zijn *Inleiding tot de nieuwere meetkunde der ruimte* van 1911 en van zijn *Meetkunde der kegelsneden* van 1909 bleef beperkt tot de diensten voor de aktenopleidingen.
Het geringe succes dat de nieuwere meetkunde in het hbs-onderwijs heeft gehad is achteraf wel verklaarbaar. Al stonden de nieuwe onderwerpen wel in de examenvoorschriften, ze werden er niet stringent in voorgeschreven en er werd op de schriftelijke eindexamens dan ook niet naar gevraagd. De vrees voor overlading die op de hbs vanaf het begin aanwezig is geweest, leidde ertoe dat de leraar er uit eigen beweging niet zo gemakkelijk toe kwam aan de leerstof niet-verplichte onderwerpen toe te voegen. Didactisch was de leraar vrij.
Vanaf het begin zijn er wel enige auteurs van leerboeken geweest die de nieuwere onderwerpen opnamen. Gelegenheid om ze te behandelen kreeg de man voor de klas daardoor wel. Als voorbeeld noemen we Ninck Blok's bewerking van Lübsen's *Mathematische Werke.* In het aan de planimetrie gewijde deel uit 1877 treffen we een behandeling aan van de stellingen van Menelaus en de Ceva en van de gelijkvormigheidspunten.
De gezaghebbende Versluys had toen zijn aanvankelijk enthousiasme al laten varen. In zijn *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde* schreef hij bij de bespreking van de omvang van het vak in 1874:

> Men heeft geweifeld bij het invoeren van de nieuwere meetkunde op de hogereburgerschool. Mijns inziens behoort zij daar niet thuis en is alleen voor de onderwijzer hare kennis van belang. Kon zij strekken om meer verband te brengen in de verschillende delen van de vlakke meetkunde, dan zou daarin een afdoende reden gelegen zijn om haar op te nemen. Zij doet dat echter niet en schijnt zelfs het geheel nog bonter te maken dan het reeds is.

Van een stelselmatig onderzoek naar de plaats van de nieuwere meetkunde in *alle* gebruikte leerboeken kan hier geen sprake zijn: er zijn in de honderd jaar meer dan honderd auteurs opgetreden! We zullen ons beperken tot een drietal gezaghebbende auteurs waarvan de opvattingen ten aanzien van ons onderwerp naast die van Versluys naar mijn mening voldoende representatief geacht kunnen worden voor het meetkundeonderwijs op de hbs.

7 *De drie P's*

Met de drie P's bedoelen we in chronologische orde en tegelijk in de volgorde van toenemende didactische verdienste prof. dr. P. van Geer, dr. P. Molenbroek en P. Wijdenes.
De laatste zou in de tweede halve eeuw van het bestaan van de hbs een evenzeer dominerende plaats gaan innemen als door Versluys in de eerste halve eeuw was ingenomen.
De leerboeken van deze drie auteurs zijn elkaar in de loop der jaren opgevolgd.

Molenbroek's leerboek zou dat van Van Geer vervangen toen dit aan een herdruk toe was, de leerboeken van Molenbroek werden vanaf 1925 door Wijdenes verzorgd, die daarna ook nieuwe leerboeken onder eigen naam liet verschijnen. Daarvoor had hij reeds in 1911 in samenwerking met dr. D. de Lange een *Vlakke Meetkunde* doen verschijnen.

a Van Geer schreef een tweedelig *Leerboek der Meetkunde:*
eerste deel, *Meetkunde van het platte vlak* (1868, tweede druk 1876),
tweede deel, *Meetkunde der ruimte* (1870, tweede druk 1881).
In deze boeken treffen we geen onderwerpen aan uit de 'nieuwere Meetkunde'. Hierdoor heeft Van Geer naar mijn mening stellig een remmende invloed uitgeoefend op de ontwikkeling van onze schoolmeetkunde. Van Geer was immers in de onderwijswereld een op de voorgrond tredende persoonlijkheid. Hij genoot o.a. bekendheid als auteur van leerboeken die bij de opleiding voor de akten m.o. gebruikt werden. Dit was een bijzonderheid in een periode waarin de studerenden voor een m.o.-akte nog veelal op buitenlandse studiewerken waren aangewezen. Bovendien was Van Geer lid van de desbetreffende examencommissie.
Van Geer's didactisch conservatisme kunnen we nader illustreren door zijn oordeel te citeren over de plaats van de axioma's in het meetkundeonderwijs. Hiervoor ontstond in de tweede helft van de negentiende eeuw groeiende belangstelling, zoals ik in mijn artikel *Franse invloed op de schoolmeetkunde in Nederland* in Euclides 48, p. 107 e.v. getracht heb aan te tonen.
Van Geer schreef in de *Inleiding* tot de *Meetkunde van het platte vlak:*

> Een axioma noemt men in het dagelijks leven een waarheid zo klaar en duidelijk, dat zij geen bewijs behoeft; doch werkelijk is er slechts één axioma, n.l.: gelijke oorzaken hebben gelijke gevolgen, en zo ergens, dan geldt zij zeker in de wiskunde. Alle andere tot nog toe aangenomen axiomata zijn slechts gevolgen van deze waarheid of haar omgekeerde . . .

Deze onkritische ontboezeming kan de lezer nieuwsgierig maken naar het standpunt van de auteur ten aanzien van Euclides' parallellenpostulaat. Van Geer stelt het uiteraard niet aan de orde. Hij tracht de problematiek te omzeilen door de introductie van een onscherp richtingsbegrip. Ook een auteur als Van der Harst die voor de ontwikkeling van de didactiek van de meetkunde hier te lande zich verdienstelijk zou maken, heeft zich later (1897) aan dezelfde cirkelredenering schuldig gemaakt als Van Geer.
b Molenbroek schreef zijn *Leerboek der Meetkunde* in 1896. En wel als voortzetting van het bovengenoemde werk van Van Geer. Blijkens het voorbericht heeft de Leidse uitgever Sijthoff er in de negentiger jaren bij Van Geer tevergeefs op aangedrongen een nieuwe druk van zijn meetkundeboek in gereedheid te brengen. Op verzoek van Van Geer aanvaardde Molenbroek tenslotte de opdracht tot de verzorging van de nieuwe druk, maar na rijp beraad kwam deze er toe een eigen manuscript om te werken onder gebruikmaking van de tekst van Van Geer.
Molenbroek kon nu schrijven:

> Het werk dat hierbij aangeboden wordt is dan ook te beschouwen als het resultaat van het gemeenschappelijk overleg tussen de hoogleraar, de uitgever en de ondergetekende.

We kunnen Molenbroek niet anders dan dankbaar zijn voor het feit, dat hij zich heeft weten los te maken van zijn gezaghebbende voorganger, ook al gewaagde hij in zijn Voorbericht nog van 'de voortreffelijke geest die het oorspronkelijk werk bezielde'.
Door zich los te maken van Van Geer is er destijds een leerboek ontstaan van grootser allure, een leerboek dat naar ons oordeel van vandaag zijn voorganger verre heeft overtroffen.
Molenbroek ruimt weloverwogen plaats in aan onderwerpen uit de 'nieuwere meetkunde' zonder overigens deze term zelf te gebruiken, maar met een verwijzing naar het werk van de Groningse hoogleraar prof. dr. P.H. Schoute. Deze had reeds in 1881 bij zijn oratie de vraag gesteld, of het niet wenselijk zou kunnen zijn de eerste beginselen der 'projectivistische' meetkunde bij het middelbaar onderwijs in te lijven.
Door de verwijzing naar de opvattingen van Schoute wist Molenbroek aan de nieuwe onderwerpen een ruimer kader, een duidelijker achtergrond te verschaffen dan aan Versluys in 1868 nog mogelijk was geweest.
Molenbroek behandelde in 1896 de theorema's van Menelaus en de Ceva, enige eigenschappen van de harmonische ligging, de leer van de poollijn van een punt t.o.v. een cirkel, machtlijnen en dubbelverhoudingen, zij het dan ook dat aan dit laatste onderwerp alleen een plaats in een aantekening achter in het boek waard werd gekeurd.Bij de tweede druk van 1902 werd er weliswaar nog niet gebroken met de traditionele behandeling van de gelijkvormigheid, maar wel werd er aan de vermenigvuldigingstransformatie aandacht geschonken en daarbij aangetoond dat deze vermenigvuldiging tot figuren leidde die op grond van de oude definitie gelijkvormig mochten worden genoemd. Aan dr. A.D. van der Harst komt echter de eer toe voor het eerst in een Nederlands schoolboek de gelijkvormigheidstheorie op de vermenigvuldiging te hebben gebaseerd (1897). Eerder had prof. dr. D.J. Korteweg de nieuwe methode reeds op zijn colleges behandeld.

In onderwijskringen werd er in het eerste kwart van deze eeuw tegen de vermenigvuldiging van figuren van veel zijden verzet geboden, door sommigen op didactische gronden (de traditionele methode zou veel eenvoudiger zijn, de nieuwe onnodig gecompliceerd), door anderen werd ze met een beroep op drogredenen afgewezen. Zo zou men volgens de auteur H.C. Derksen alleen getallen mogen vermenigvuldigen, geen punten!
Derksen en de Laive, auteurs van een veel gebruikte serie wiskundeboeken, hebben hun verzet tot het einde toe volgehouden. Eerst toen in 1937 de gelijkvormigheidstransformatie in het nieuwe leerplan werd opgenomen, ging de bewerker van de leerboeken van Derksen en de Laive er noodgedwongen toe over de verwerpelijk geachte methode in de boeken te behandelen.
Ondanks het gebruik van de term 'gelijkvormingsheidstransformatie' kon men de programmaherziening van 1937 nauwelijks als een stap in de richting van de opvattingen van Klein beschouwen. Bij deze ging het immers om de transformatie *van* het gehele vlak, in onze didactiek van die jaren slechts om transformatie van figuren *in* het oude vlak.
Wijdenes heeft zich steeds een paladijn voor de transformatie van figuren getoond,

niet alleen voor wat het vhmo betreft, maar eveneens voor het onderwijs op onze mulo-scholen.

c Bij de gereedmaking van de opvolgende drukken van Molenbroek's leerboeken treedt vanaf de derde druk van de vlakke meetkunde Wijdenes steeds sterker op de voorgrond. Op de duur zou de verzorging van de herdrukken van alle leerboeken van Molenbroek voor de uitsluitende verantwoordelijkheid van Wijdenes komen te staan.

In 1923 komt er een splitsing tot stand in de opzet van Molenbroek's leerboeken. Tot dusver hadden deze boeken een tweeslachtig karakter gedragen, doordat ze voor schoolgebruik bestemd waren en tevens moesten dienen als leidraad bij de aktenstudie. Daarin werd nu verandering gebracht: het schoolboek onder beider naam wordt een verkorte bewerking van Molenbroek's vijfde druk (vlakke meetkunde). De zesde druk van 1924 gaat voorzien in de behoeften van hen die de akte wiskunde l.o. of de middelbare akte K^I wensen te halen. Het voorbericht van deze druk wordt ondertekend door Molenbroek èn door Wijdenes, terwijl op de titelpagina evenals bij de volgende drukken alleen Molenbroek's naam te vinden is. De titel van het schoolboek waarvan het eerste deel in 1929, het tweede in 1931 de tweede druk beleeft, luidt:

Planimetrie voor middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs, door dr. P. Molenbroek en P. Wijdenes.

De voorberichten van de eerste druk waren ondertekend door de beide auteurs, die van de tweede druk door Wijdenes alleen. Deze deelt daarbij mee, dat het herzieningsrecht van de planimetrie voortaan door hem zal worden uitgeoefend buiten enige verantwoordelijkheid van dr. P. Molenbroek voor vorm en inhoud.

Aan het voorbericht ontlenen we de volgende informatie inzake de onderwerpen uit de nieuwere meetkunde:

> Wij hebben gemeend, dat het onderwijs en de ontwikkeling der leerlingen er mede gebaat zullen zijn, indien de volgende onderwerpen, zij het dan eenvoudig en beknopt, behouden blijven:
> 1 de begrippen positief en negatief;
> 2 de stellingen van Menelaus en Ceva;
> 3 de volledige vierzijde;
> 4 de harmonische ligging;
> 5 pool en poollijn;
> 6 de juiste behandeling van de gelijkvormigheid;
> 7 de machtlijn van twee cirkels;
> 8 het begrip radiaal.
> Het is veel leerzamer en verheffender deze begrippen aan te brengen dan zich af te sloven op wat wij noemen de mikroskopie van de driehoek; . . .

Van de onderwerpen die we in de nieuwere meetkunde plegen aan te treffen ontbreken alleen de dubbelverhoudingen en de anharmonische snijding. In de oorspronkelijke uitgave, de 'grote Molenbroek', blijven ze uiteraard wel gehandhaafd.

Met dit schoolboek wordt volledig de gelegenheid geschapen de onderwerpen uit de nieuwere meetkunde opgesomd in de examenvoorschriften van 1868 op verantwoorde wijze in het normale meetkunde-onderwijs van de hbs te behandelen. Ik

heb echter niet de indruk, dat deze onderwerpen nu ook dezelfde aandacht kregen die de traditionele steeds hadden genoten. Van de vrijheid onderwerpen over te slaan is naar mijn indruk op ruime schaal gebruik gemaakt. De omstandigheden dat de planimetrie op de hbs in de derde klas afliep, maakte dat alleen op die planimetrische onderwerpen in de bovenbouw teruggekomen behoefde te worden, die in de stereometrie voor het eindexamen functioneerden.
Ondertussen groeiden de beide leerboeken voor vlakke meetkunde en voor stereometrie die uitsluitend onder Molenbroek's naam bleven verschijnen, door de zorgen van Wijdenes en zijn medewerkers Harlaar en Herreilers uit tot handboeken van grootse allure in de eerste plaats bestemd voor de vele wiskundeleraren die hun bevoegdheid via aktenstudie hadden verworven of wensten te verwerven.
Ook aan een axiomatische fundering van de meetkunde die na de verschijning van Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* (1899) langzamerhand ook in Nederlandse onderwijskringen sterkere belangstelling zou gaan trekken, werd in de achtste druk van de *Vlakke Meetkunde* aandacht geschonken.
Door de modernisering van het wiskunde-onderwijs in de zestiger jaren die er toe leidde, dat vanaf 1968 met geheel nieuwe wiskundeprogramma's werd gestart, èn door de nieuwe wiskundeprogramma's die voor de aktenstudie van kracht werden, ontstond er een geheel nieuwe situatie waarin de handboeken van Molenbroek-Wijdenes hun betekenis voor het onderwijs gingen verliezen. De boeken hebben in de huidige omstandigheden alleen nog maar historische betekenis.

8 *Kegelsneden*

Eén onderwerp uit de synthetische meetkunde uit het hbs-programma verdient in verband met het voorgaande nog onze aandacht. Van 1937 tot 1958 was in het meetkunde-leerplan voor de hbs-B het onderwerp 'stereometrische voortbrenging der kegelsneden' opgenomen. Terwijl in 1868 de 'nieuwere meetkunde' wel een plaats kreeg in de eindexamenvoorschriften maar niet in het leerplan zelf, was het in 1937 net andersom: de kegelsneden stonden wèl in het leerplan, maar kwamen niet in het eindexamenprogramma. Hoewel de auteurs van leerboeken spoedig plaats gingen inruimen aan het nieuwe onderwerp bleven de kegelsneden een doorgaans verwaarloosd deel uitmaken van het wettelijke programma. De oorlogsomstandigheden van 1940 tot 1945 hebben stellig mede een aanleiding tot het verwaarlozen van het nieuwe onderwerp opgeleverd.
In 1958 kwam het onderwerp weer te vervallen. De kegelsneden gingen nu een onderdeel vormen van het nieuwe vak analytische meetkunde op de hbs. De programma's van gymnasium en hbs werden ten aanzien van de wiskunde gelijk getrokken. Het lag voor de hand dat men anno 1958 aan een analytische behandeling de voorkeur ging geven boven de synthetische. De betekenis van de synthetische meetkunde was in de wetenschap al bijna een eeuw lang op zijn retour.
Een halve eeuw eerder zou de incorporatie van de kegelsneden in het meetkundeprogramma van de hbs nog een belangrijke vernieuwing hebben kunnen betekenen, waarbij men aan de projectieve ideeën van Poncelet, Chasles e.a. en aan de transformatiegedachte van Klein zoals die zich sinds 1872 had ontwikkeld, recht had kunnen doen wedervaren. Maar Klein's opvattingen hebben in ons land

nauwelijks enige weerklank gevonden. En wat de kegelsneden betreft, een actie ten gunste van dit onderwerp hebben we niet gekend. Eerst in 1909 schreef Versluys zijn boekje over dit onderwerp en dan alleen nog maar in dienst van de aktenstudie.
En een leuze analoog aan de Duitse kreet van Dubois-Reymond uit de zeventiger jaren van de negentiende eeuw: *Kegelschnitte, kein griechisches Skriptum mehr!* aangepast aan de situatie op de hbs, werd hier dan ook nimmer aangeheven.

Het getij ten gunste van een modernere synthetische meetkunde was in 1938 verlopen. Het systeem van Euclides al of niet aangevuld met enige nieuwere onderwerpen had afgedaan. Spoedig na de tweede wereldoorlog zou er een nieuwbouw beginnen, los van Euclides. Op internationaal vlak, in België onder de voortvarende leiding van Papy, in ons land onder de voorzichtiger leiding van de in 1961 gestichte *Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.*
Die nieuwbouw is anno 1973 nog in volle gang.

9 *Samenvatting*
a In de voorschriften voor het eindexamen der hogereburgerscholen van 1868 vormde de aanbeveling van enige onderwerpen uit de 'nieuwere meetkunde' een Fremdkörper van waarschijnlijk Franse origine.

b De activiteiten van Versluys ten aanzien van de nieuwere meetkunde hebben in de negentiende eeuw wel de studie voor de wiskunde-akten, maar niet de schoolmeetkunde zelf wezenlijk beïnvloed. Het enthousiasme van Versluys zelf was trouwens van zeer korte duur.

c De door Klein in zijn *Erlanger Programma* van 1872 ontwikkelde ideeën inzake meetkundige transformatiegroepen hebben het Nederlandse meetkunde-onderwijs niet beïnvloed.
In het wiskundeprogramma van de hbs werd in 1937 alleen de gelijkvormigheidstransformatie opgenomen. Deze introductie had hier te lande echter nog niet plaats in Klein's geest: men behandelde in de schoolmeetkunde niet de transformaties *van* het gehele vlak, maar alleen van figuren *in* dat vlak.
Dit geldt ook voor het moderner geörienteerd leerboek van Wijdenes uit 1950 dat dus nog werd geschreven ten bate van de oude hbs. Hierin staan de verplaatsingen van figuren in het vlak centraal.

d De onderling samenhangende leerboeken voor meetkunde van Van Geer, Molenbroek en Wijdenes hebben langzamerhand een bevredigende integratie tot stand gebracht tussen het eeuwenoude stelsel van Euclides en als nieuwer beschouwde opvattingen. Het voltrekken van deze integratie was allereerst van betekenis voor de opleiding voor de diverse wiskunde-akten, en eerst in de tweede plaats voor de schoolmeetkunde zelf.

e Een van de oorzaken voor de geringe betekenis die de voorschriften van 1868

voor onze schoolmeetkunde hebben gehad moet gezocht worden in het feit dat verzuimd werd deze nieuwe onderwerpen in een leerplan op te nemen. Een andere oorzaak ligt in de omstandigheid dat er een onvoldoende samenhang was tussen de diverse vernieuwingen en dat deze niet duidelijk werden geplaatst tegen de achtergrond van de zich sinds het begin van de negentiende eeuw ontwikkelende projectieve meetkunde.
De opvattingen van prof. dr. P.H. Schoute uiteengezet in zijn oratie *De kegelsneden in de projectivistische meetkunde* (1881) hebben het meetkundeprogramma van de hbs niet beïnvloed.

f De modernisering van ons wiskunde-onderwijs in de zestiger jaren van deze eeuw heeft het stelsel van Euclides in zijn traditionele vorm, mèt de in de negentiende eeuw naar voren gekomen 'nieuwere meetkunde', uit ons schoolonderwijs doen verdwijnen en laat het probleem van aard en plaats van het resterend 'meetkunde'-onderwijs binnen ons voortgezet onderwijs tot dusver onopgelost.

NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Contributie voor 1974-1975 verhoogd

De penningmeester maakt de leden er op attent, dat op de laatste jaarvergadering de contributie verhoogd is tot *f* 25,– per verenigingsjaar. Leden die Euclides niet via de vereniging ontvangen betalen *f* 10,–. Men kan de contributie voor het komende jaar nu reeds overmaken op giro 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

Oefening baart kunst

A. LAGERWERF

Zeist

HET HOSPITEREN EN HET SCHOOLPRAKTIKUM ALS VAARDIGHEIDSTRAINING

Een leraar kan, terwijl hij in de klas bezig is, niet alles wat hij doet rustig overdenken. Daarvoor moet hij *te veel tegelijk* doen; hij moet ook dikwijls *snel* reageren.[1] Dat kan hij leren door goed te oefenen.
Hij zal zich nooit kunnen permitteren gedachtenloos te werk te gaan, of dingen te doen, waarvan hij eigenlijk niet begrijpt waarom hij ze zo doet. Daarvoor zijn leerlingen te kostbaar.

Dit stuk gaat over deze vaardigheidsaspekten van het leraarschap en de oefening ervan. Het was aanvankelijk slechts bestemd voor studenten die gaan hospiteren of deelnemen aan een schoolpraktikum, vanuit het Pedagogisch Didaktisch Instituut te Utrecht. Ik denk dat het nuttig is deze aspekten van het 'leraar zijn' wat meer aandacht te geven; vandaar deze publikatie.

1. Iemand die deze aspecten van een klasse-situatie niet meteen herkent, doet er goed aan alvast een blik vooruit te werpen, op 4.1 en 4.3 bijvoorbeeld.

1 INLEIDING

Iemand die voor de eerste keer als chauffeur in een auto rijdt heeft het nogal moeilijk. De ervaren chauffeur daarentegen draait zijn hand niet om voor allerlei capriolen met zijn auto: Hij heeft een *vaardigheid* verworven; hij *kan* autorijden. Als hij een bewuste rijder is, zal hij die vaardigheid steeds beter gaan beheersen.

Dat wil zeggen:

— hij rijdt beter
— hij kan tijdens het rijden aan andere dingen denken, als er tenminste niet iets bijzonders aan de hand is.
— hij kan ook rijden onder moeilijke omstandigheden.

In het algemeen is het zo dat iemand die vaak hetzelfde moet doen daar handigheid in krijgt.
De vaardigheden waarover een leraar moet beschikken zijn maar voor een deel te vergelijken met die van een chauffeur.
Een leraar *bestuurt*, in de zin van *geeft leiding in*, een leersituatie.[1] Leren is een sociaal proces; de leiding van de leraar houdt direct verband met wat de leerlingen doen. De leraar moet weten hoever de klas is, op de weg naar het gestelde doel.

'Met een lepeltje in je koffie roeren' is een eenvoudige vaardigheid.
'Leraar zijn' is een gecompliceerde vaardigheid. Het is nauwelijks denkbaar dat een leraar die met leerlingen bezig is, aan iets anders zit te denken.

Opmerkenswaardig is dat nooit twee situaties precies gelijk zijn. Koffiekopjes zijn er in talloze soorten en maten, lepeltjes variëren van echte schepinstrumenten tot eenvoudige roerstokjes, er kan veel of weinig koffie ingeschonken zijn, 't kopje kan al of niet op een handige plaats staan, enz. Toch ken ik niemand die melk en suiker in zijn koffie weigert vanwege het roerprobleem. Het is ook niet nodig een gesprek te onderbreken om de koffie te kunnen roeren.
Ook in een klas vind je nooit twee keer dezelfde situatie. Het aantal variabele factoren is er echter talloze malen groter dan in 't roer-probleem. Ieder individu is op elk moment uniek. Een leraar slaagt er niet in de zaak zó goed onder kontrole te hebben dat hij op automatische besturing kan overgaan en zijn gedachten de vrije loop kan laten.
Dat betekent niet, dat een leraar alles wat hij doet zeer bewust doet; zie de eerste twee zinnen van dit artikel. Een leraar kan niet zeer bewust tegelijkertijd, zowel de klas waarnemen en konklusies trekken uit wat hij ziet en hoort, als een aan hem gestelde vraag analyseren en in de les verwerken, en de voortgang van de les in de gaten houden, om maar eens iets te noemen. Een leraar

moet *zoveel mogelijk* bewust te werk gaan.
We hebben echter bovendien nog te maken met de gewenste *effektiviteit* van de vaardigheidsuitoefening. Die is bij het koffie roeren niet zo groot. Als koffie en suiker niet goed gemengd zijn, roeren we nog een keer. Maak ik te onhandige bewegingen, dan vangt het schoteltje de koffieplas op en zelfs als dat niet voldoende blijkt, en ik op de tafel mors, dan is er nog niets erg gebeurd.
Geheel anders nu de leraarssituatie.
Het effekt van het onderwijs is vaak moeilijk te overzien. Het is dikwijls een kwestie van schatten in hoeverre een doel bereikt is. Maar leerlingen zijn kostbaar, we kunnen daarom *niet minder* dan *zo goed mogelijk* onderwijzen; voor elke leerling zo veel mogelijk aandacht. Temeer daar tegenover de vormende waarde van een goede leersituatie de mis-vorming van een mislukt leerproces staat.

2 KENNIS EN OEFENING

Bij het aanleren van vaardigheden spelen deze faktoren een rol:

Kennis
Je moet bij het leren autorijden tenminste weten *wat* je moet *doen*.
Bij sommige rijscholen leer je bovendien *waarom* dat zo moet.
Begrijpen wat je doet is vaak erg belangrijk.

Oefening
Al weet je nog zo goed wat je doen moet, je leert het pas door te gaan oefenen.

> **Opmerking.** Natuurlijk speelt ook de houding een rol. Als je autorijden een onnozele bezigheid vindt, zal je 't moeilijk kunnen leren, zo je het al wilt. Op dit aspect ga ik nu niet nader in.

3 OVER HET BEGRIJPEN

Het is niet altijd belangrijk dat je begrijpt wat je doet. Er zijn mensen die uitstekend autorijden, maar bijvoorbeeld niet begrijpen wat er gebeurt als zij het koppelingspedaal indrukken. Een automonteur begrijpt zulke dingen wel. Als hij niet meteen hóórt wat er aan de hand is, dan komt hij het wel te weten door even in de auto te rijden. Dat wil echter nog niet zeggen dat de monteur beter autorijdt.

Het komt vaak voor dat het voor iemand voordelig of nodig is, dat hij begrijpt wat hij doet als hij een vaardigheid uitoefent. Een leraar verkeert in zo'n situatie.
Een leraar werkt met mensen samen. Dat verplicht hem, zich dikwijls af te

vragen: waarom doe ik dit en dat zus en zo? Hij moet zich nu of later tegenover die medemensen kunnen verantwoorden als de vraag komt: waarom deed u dit en dat bij ons zus en zo?

Er zijn ook een aantal pragmatische argumenten aan te voeren voor het ontwikkelen van leraarsvaardigheden met begrip.

Begrijpen werkt integrerend op het toepassingsgebied.
Leraren die begrijpen wat leerstofkeuze is, kunnen gemakkelijker de vakkengrenzen doorbreken.
Als je begrijpt waarom een les aan bepaalde eisen moet voldoen, doet het niet zoveel meer terzake over welk onderwerp je een les moet geven.
VAARDIGHEDEN DIE JE BEGRIJPT ZIJN RUIMER TOEPASBAAR.

Begrijpen werkt differentiërend op de aard van de toepassing.
Als je iets begrijpt van mogelijkheden en moeilijkheden van leerlingen-gedrag, dan lach je een puber niet uit om een domme opmerking, maar laat je hem in zijn waarde.
Als je iets begrijpt van doelstellingen en toetsen, dan zorg je dat het begripsniveau van de toets niet boven dat van de les uitgaat.
Korte-termijn doelen zijn duidelijker, beter te toetsen en worden sneller bereikt dan lange-termijn doelen. Dat betekent nog niet dat korte-termijn doelen ook belangrijker zijn: integendeel wellicht. Als je begrijpt waardoor korte-termijn doelen zo aantrekkelijk zijn, vergeet je de lange-termijn doelen niet zo gemakkelijk.
BIJ VAARDIGHEDEN DIE JE BEGRIJPT IS DE KANS OP FOUTEN KLEINER.

Begrijpen van een vaardigheid impliceert het doorzien van de situatie waarin die vaardigheid toepasbaar is of niet, de diagnose.
Als je het effect van de verschillende werkvormen begrijpt kun je trefzeker de juiste kiezen.
Na de mededeling van een onverwachte vrije dag, neem je niet de teugels van de klas meteen weer stevig in handen, als je iets begrijpt van het omgaan met kinderen. Op zo'n moment moet niet de vaardigheid: 'Je wil opleggen aan de klas' uitgeoefend worden, maar: 'De klas met soepele hand leiding geven'.

Van vaardigheden die je begrijpt kun je snel zien of ze toepasbaar zijn of niet. Je verliest geen tijd voor de analyse van de situatie of met het toepassen van de verkeerde vaardigheid.
DE TOEPASSING VAN VAARDIGHEDEN DIE JE BEGRIJPT IS DAARDOOR EFFECTIEVER.

Kortom: Bij een *vaardigheid* die je *begrijpt* is
het toepassingsgebied groot
de kans op fouten klein
de toepassing effectief.

4 OVER HET OEFENEN

4.1. De vereenvoudigde oefensituatie

In deze ingewikkelde maatschappij is het dikwijls zinvol, vaardigheden niet in de werkelijke situatie te verwerven. Iemand die wil leren autorijden moet dat niet alléén doen, dat is te gevaarlijk. We zorgen voor een *beschermde situatie* om de vaardigheid te oefenen.
De beginnende leraar moet in de klas aan 100 dingen tegelijk denken, dat kan niet.
We kunnen de situatie een beetje vereenvoudigen, zodat hij nog maar aan 10 dingen tegelijk hoeft te denken; dat kan nog net.
Dat betekent concreet bijvoorbeeld:

we geven hem nog niet de volledige verantwoordelijkheid
we elimineren het ordeprobleem
we geven hem minder leerlingen
we maken de les wat korter
we nemen eenvoudige leerstof
enz.

Zo ontstaat een sterk vereenvoudigde situatie waarin de hospitant het leraar zijn kan oefenen.

N.B. Je kunt niet willekeurig de situatie vereenvoudigen. Oefenen zonder 'leerlingen' heeft bijvoorbeeld nauwelijks zin, evenmin als 'droogzwemmen', dat staat te ver van de werkelijkheid.

Het leraar zijn heeft vele facetten. In de klas zijn allerlei vaardigheden nodig die meer of minder onafhankelijk zijn.

de kunst van het vragen stellen
discussiëren met de klas
analyse van antwoorden
kunnen luisteren
iets moeilijks uitleggen
duidelijk spreken/schrijven
zien wat de leerlingen doen
zichzelf waarnemen
enz.

Eén van de mogelijkheden van de 'beschermde situatie' is dat de hospitant tijdens zijn lessen op deze deelvaardigheden kan focusseren. Het is erg zinvol regelmatig vóór de les vast te stellen:

'Nu ga ik eens extra goed letten op mijn luisteren naar de klas' of zo iets.

4.2. Een strategie

Elke keer dat een vaardigheid wordt uitgevoerd moet dat, *vooral* als die vaardigheid nog moet worden ingeoefend, terdege worden voorbereid.
Een adspirantzwemmer plompverloren in het water smijten, is even zinloos als hem te laten droogzwemmen.
Hij moet eerst ervaren hoe dat aanvoelt, helemaal in dat koude natte water, maar zonder de dreiging van het verdrinken: Met de voeten zonodig vast op te bodem.
Laat hem eens kopje onder gaan, op de bodem gaan zitten, enz., enz. Kortom hij moet kennismaken met de oefensituatie. Daar komt nog geen zwembeweging aan te pas.
Deze eerste fase is de *oriëntatie.*
De hospitant oriënteert zich in de school vóór hij zelf gaat lesgeven: luisteren, kijken, interpreteren, praten, gezien worden enz. Dit is een procesdoel, je moet het meemaken om te weten wat een school is.

Ook het voorbereiden van een les hoort bij de oriëntatiefase. De hospitant moet nu gaan 'plannen'. Aan de hand van het model Didaktische Analyse wordt de leersituatie opgebouwd. Hij moet zich zo duidelijk mogelijk een voorstelling maken van waar hij op moet letten om te weten te komen 'hoe het gaat'. Hij zorgt natuurlijk voor vragen die diagnostisch toetsen, maar ook ongevraagd komt er veel informatie binnen.

Het eerste optreden van de hospitant is een procesdoel op zich zelf. Het is de overgang van de oriëntatiefase naar de oefenfase. Als de oefenfase goed vereenvoudigd is dan zal zo'n eerste oefening niet mislukken.
De hospitant merkt dat het toch weer anders is dan hij dacht. Het is bijvoorbeeld erg moeilijk om juist de relevante zaken in de klas op te merken, en die te verwerken.

De hospitant kent dan de oefensituatie.
Dat betekent niet: nu maar in 't wilde weg gaan oefenen. Nee, voor elke les opnieuw een stukje oriëntatie: Wat gaat er gebeuren?
Kunnen we een vereenvoudiging van de situatie wegnemen?
Op welke facetten van het leraarschap valt het accent?

De uitvoering van de vaardigheid gaat aanvankelijk nogal 'houterig'. In de loop van de tijd wordt dat beter; dat wil zeggen

De hospitant kan steeds beter de situatie overzien; hij ziet relevante zaken.
Ook subtiele 'aanwijzingen' uit de klas weet hij te duiden.
Het lukt hem steeds beter die informatie te verwerken en zo de onderwijsleersituatie continu bij te sturen (vergelijk het sturen van een auto).
Hij gaat steeds meer dingen minder bewust, góed doen.
De onderdelen van de vaardigheid worden steeds beter geïntegreerd tot een geheel.

4.3. Het evalueren

Een lesplan is geen wet van Meden en Perzen. Als tijdens de les blijkt dat het niet goed gaat kan er van worden afgeweken. Hoe blijkt dat het niet goed gaat? Voor een antwoord op deze vraag moet je goed weten wat er tijdens de les in de klas gebeurt. Je moet informatie inwinnen en die interpreteren.

Wat doen de leerlingen?
Hoe zitten ze erbij?
Hoe voel ik mezelf?
Volg ik m'n lesplan nog? waarom?
Durf ik nog vragen te stellen?
Durven zij nog vragen te stellen?
Wat vragen ze dan? Waarom?
enz. enz.

Observeren terwijl je les geeft, is erg moeilijk; we oefenen dat eerst door de les van een ander te observeren.
Tijdens de oriëntatie kan daarmee al een begin gemaakt worden.
In een klassesituatie gebeurt ontzettend veel, niet alles is echter relevant. We moeten *die* zaken opmerken die een *aanwijzing* geven over het verloop van het leerproces. De interpretatie van de gegevens is inbegrepen in de observatie.

N.B. Het komt dikwijls voor dat geïnterpreteerd wordt op grond van 'niet valide', onvolledige, gegevens.
Jan kijkt niet naar het bord. ⟹ Jan let niet op.
Piet kijkt naar het blaadje van Klaas. ⟹ Piet spiekt.
Het is in dergelijke gevallen nodig aanvullende informatie in te winnen.

Na de les vind je de rust om het geheel nog eens te overzien en te bespreken. Je moet dat doen om allerlei ervaringen en feiten te expliciteren. Daardoor kun je er bij een volgende gelegenheid beter gebruik van maken.

Hoe vond ik het?
Wat ging fout? Waarom, waardoor?
Wat ging goed? Waarom, waardoor?
Is er nog meer gebeurd dat ik wil bespreken?
Wat was moeilijk?
Wat hebben ze geleerd?
Wat heb ik geleerd?
Wat zijn de konsekwenties voor de volgende oefening?
enz.

5 DE SCHOOL ALS EEN OEFENPLAATS

Als hospitant moet je je realiseren dat de school *voor jou een leersituatie is.*
Je kunt al je onderwijskundige kennis er op loslaten.
Dat betekent: overdenk bij elke activiteit je beginsituatie en je doel. Zorg dat die passen bij de doelen van de les of de vergadering die je bijwoont. Als je zelf les geeft doe je bij de voorbereiding alles dubbel.
Je moet denken over het leren van de leerling, maar ook over het leren van jezelf.
Er is weliswaar maar één onderwijsleersituatie, maar de rollen zijn verdeeld. Je bent leraar en leerling tegelijk.
Deze dubbelrol is niet eenvoudig.
Het is nodig dat de klas het spel doorziet en accepteert. Dat vereist een, ook in dit opzicht, goed leraarschap van de mentor/schoolpraktikumleider.
Vanzelfsprekend komt bij de nabespreking zowel het leerproces van de klas als dat van de hospitant ter sprake.

6 SLOT — SAMENVATTING

Een vaardigheid moet worden aangeleerd.
Het oefenen van het leraarschap begin in een beschermende oefensituatie.
Essentieel voor deze beschermende situatie is dat de hospitant nog niet volledig verantwoordelijk is.
Oefenen gebeurt niet in het wilde weg. Dit stuk geeft aanwijzingen.
Het is onmogelijk het leraar zijn in de beschikbare tijd te leren. De hospitant moet 'op het goede spoor gezet worden'. Dat betekent dat hij *tenminste*

zichzelf in de klassesituatie kan observeren
beseft dat hij verder moet leren
weet hoe hij verder kan leren
de gewoonte heeft om zijn lessen na afloop te evalueren.

Zolang de hospitant zichzelf nog niet kan observeren in de klassesituatie is de mentor nodig om hem die gegevens te verschaffen die hij zelf niet heeft kunnen verzamelen. Ook moeten verkeerde interpretaties, vooral die op grond van niet valide gegevens, worden herzien.
De expert is in de eerste plaats meester in het observeren. Zoals gezegd, inclusief de interpretatie. Hij weet welke aanwijzingen uit de situatie belangrijk zijn. Doordat hij snel subtiele verschillen in de situatie kan duiden, kan hij snel bijsturen en loopt de zaak niet uit de hand. Hij heeft daardoor meer aandacht vrij voor specifieke elementen in de situatie. Dat blijkt bijvoorbeeld bij 't werken onder moeilijke omstandigheden.

Pedagogisch- Didaktisch Instituut voor de Leraarsopleiding
Afdeling Didaktiek van de Wiskunde.
Budapestlaan 6. Utrecht.

december 1973

GLAXO WETENSCHAPSPRIJZEN VOOR NEDERLAND – 1974

In het kader van haar bedoeling een bijdrage te leveren tot het populariseren van wetenschappelijke onderwerpen, stelt het pharmaceutische concern Glaxo Holdings Ltd., Engeland een tweetal prijzen beschikbaar voor journalisten en publicisten, alsmede een extra prijs voor jonge wetenschapsbeoefenaren.
In Engeland wordt de 'Glaxo Travelling Fellowship for British Science Writers' jaarlijks uitgereikt en sinds enkele jaren afwisselend in een van de E.E.G. landen. In verband met de oprichting van Glaxo B.V. in 1973, komt naar een beslissing van de Board of Directors, thans Nederland voor de navolgende prijzen in aanmerking:

Glaxo Wetenschapsprijs voor Publicisten

f 5.000,–	voor een in 1973 in een dagblad, week- of maandblad of ander tijdschrift gepubliceerd artikel over een wetenschappelijk onderwerp
f 5.000,–	voor een tekst van een in 1973 uitgezonden radio- of televisieproduktie over een wetenschappelijk onderwerp

Glaxo Wetenschapsprijs voor Jongeren

f 3.500,–	Eerste Prijs
f 1.500,–	Aanmoedigingsprijs voor in 1973 geschreven verhandelingen. Inzendingen in deze categorie behoeven niet gepubliceerd te zijn; deelneming staat open voor hen die geboren zijn na 31 december 1943.

In de onafhankelijke jury, die de inzendingen zal beoordelen, hebben zitting:

Prof. Dr. P.J. Gaillard	Hoogleraar celbiologie en histologie te Leiden, Voorzitter Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen
H.A.M. Hoefnagels	Hoofdredacteur Haagsche Courant
Drs. F. Lagerwey	Voorzitter Nijverheidsorganisatie TNO
C.K. Langeraad	Medewerker bijzondere projecten NOS
Prof. Dr. D. de Wied	Hoogleraar pharmacologie te Utrecht vice-voorzitter Stichting Bio-Wetenschappen en Maatschappij

Inschrijvingsformulieren en reglement kunnen tot 30 juni 1974 worden aangevraagd bij Glaxo B.V., Parklaan 6-8, Hoofddorp.

Het bekendmaken van de prijswinnaars zal in het najaar van 1974 geschieden.

22 april 1974

Iets over het gebruik van de logaritmen-tafel

Drs. GERARD SIERKSMA

Groningen

Tot nu toe is in veel Wiskunde-schoolboeken, waarin het gebruik van de log(aritmen)-tafel uitgelegd wordt, gebruik gemaakt van o.a. de begrippen 'mantisse' en 'wijzer'. Het 'plaatsen van de komma' levert vele(n) moeilijkheden op.
Het gaat over vergelijkingen van de vorm $\log x = y$ ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ en $x > 0$).
Als x gegeven is en y te bepalen, spreken we van 'opzoeken van de logaritme'; is y gegeven en moet x bepaald worden, van 'terugzoeken van de logaritme'.
Ik zou de volgende procedure willen proberen, waarbij de begrippen 'mantisse' en 'wijzer' geen rol spelen, waarbij het plaatsen van de 'komma' geen punt is, en waarbij zowel het 'op –' als 'terugzoeken van de logaritme' systematisch verloopt.

1. Inleiding

We gaan uit van de bekende log-tafel in 4 decimalen, voor logaritmen met grondtal 10.
De volgende formules dienen de leerlingen te kennen

$$\log a \times b = \log a + \log b \tag{1}$$

$$\log a^p = p \log a \tag{2}$$

met uiteraard a en b groter dan 0.
Verder

$$\log 10 = 1 \tag{3}$$

Essentieel is nu dat de log-tafel als volgt gelezen moet worden

x	0	1	2	....
1,00	0,0000	0,0004	.....	
1,01	0,0043	0,0048	.....	
.	.	.		
.	.	.		
.	.	.		

Dus a. komma geplaatst in de linkerkolom (de waarden van x) vóór de laatste twee cijfers.
b. 0, geplaatst voor elk getal in het middengedeelte (de waarden van $\log x$).

Zie Moderne Wiskunde D1.6, V.W.O., blz. 35.

2 Het opzoeken van de logaritme

Elk positief reëel getal kan geschreven worden in de vorm

$$a \,.\, 10^p,$$

waarin $1 \leqslant a < 10$ en $p \in Z$.

B.v.

60,32	$= 6{,}032 \times 10^1$
3218	$= 3{,}218 \times 10^3$
0,00026215	$= 2{,}6215 \times 10^{-4}$

Aan de hand van deze drie voorbeelden laat ik zien hoe de logaritme met de log-tafel bepaald wordt.

log 60,32 $= \log 6{,}032 \times 10^1$
(formule (1) gebruiken)
$= \log 6{,}032 + \log 10$
(log 6,032 op de bekende manier met de log-tafel bepalen; formule (3) gebruiken)
$= 0{,}7805 + 1$
$= 1{,}7805.$

log 3218 $= \log 3{,}218 \times 10^3$
(formule (1) gebruiken)
$= \log 3{,}218 + \log 10^3$
(logaritme opzoeken; (2) en (3) gebruiken)
$= 0{,}5076 + 3$
$= 3{,}5076.$

log 0,00026215 $= \log 2{,}6215 \times 10^{-4}$
(2,6215 afronden tot 2,622 en we kunnen weer op de 'oude' bekende manier de logaritme opzoeken)
$= 0{,}4186 - 4$
$= -\,3{,}5814.$

3 Het terugzoeken van de logaritme

Gegeven is nu een reëel getal y en te bepalen is een x zodat $\log x = y$. Om te beginnen kijken we naar het middengedeelte van de log-tafel. Hier staan getallen van de vorm 0, ... Dus alleen voor dergelijke getallen kunnen we de log-tafel raadplegen, en we dienen dus het getal y in deze vorm te gieten.
De procedure zal bij het 'terugzoeken' precies in de omgekeerde volgorde verlopen als bij het 'opzoeken'.
We geven vier voorbeelden.

$\log x = 3{,}62$
$= 0{,}62 + 3$
$= \log 4{,}169 + 3 \log 10$
$= \log 4{,}169 + \log 103$
$= \log 4{,}169 \times 10^3$
Dus $x = 4169$

Merk op, dat de formules (1), (2) en (3) ook juist in omgekeerde richting gebruikt worden: eerst het rechterlid, daarna het linkerlid.

$\log x = 63{,}8213$
$= 0{,}8213 + 63$
$= \log 6{,}626 + 63 \log 10$
$= \log 6{,}626 + \log 10^{63}$
$= \log 6{,}626 \times 10^{63}$
Dus $x = 6{,}626 \times 10^{63}$

$\log x = -0{,}432$
$= 0{,}568 - 1$
$= \log 3{,}698 - 1.\log 10$
$= \log 3{,}698 + \log 10^{-1}$
$= \log 3{,}698 \times 10^{-1}$
Dus $x = 0{,}3698$

$\log x = -2{,}1827$

$= 0{,}8173 - 3$
$= \log 6{,}566 - 3.\log 10$
$= \log 6{,}566 + \log 10^{-3}$
$= \log 6{,}566 \times 10^{-3}$
Dus $x = 0{;}006566.$

Over 'grootheden'

B.L. VAN DER WAERDEN

Zürich

In 'Euclides' 49, p. 161 heeft Dr. P.G.J. Vredenduin een bijdrage tot de logische analyse van het begrip 'grootheid' geleverd, waarbij hij als uitgangspunt en standaardvoorbeeld het begrip 'temperatuur' heeft genomen.

Ik ben het met Dr. Vredenduin eens, dat het wenselijk is, het begrip 'meetbare grootheid' nader te preciseren. Zijn idee, wiskunde en natuurkunde nader bij elkaar te brengen en voorbeelden van 'grootheden' aan beide wetenschappen te ontlenen, vind ik voortreffelijk. Ik sympathiseer dus helemaal met de bedoeling van Dr. Vredenduin.

Des te meer spijt het mij, dat zijn behandeling van het begrip 'temperatuur' naar mijn mening niet juist is.

Dr. Vredenduin gaat uit van de volgende definitie: 'Twee objecten *hebben dezelfde temperatuur,* als er, indien ze met elkaar in contact gebracht worden, geen warmteoverdracht van het ene object op het andere plaats heeft.'

Dan vervolgt hij: 'De relatie "dezelfde temperatuur hebben" is een ekwivalentierelatie. Deze relatie brengt dus een partitie teweeg in de objecten. De ekwivalentieklassen van deze partitie noemen we temperaturen.'

Mijn eerste tegenwerping is, dat niet duidelijk is gezegd, welke 'objecten' hier bedoeld zijn. Iets eerder worden de objecten 'lichamen' genoemd, iets later 'voorwerpen', maar er wordt niet duidelijk gezegd, voor welk soort objecten de relatie 'dezelfde temperatuur hebben' gedefinieerd is.

Is bijvoorbeeld de zon een 'voorwerp'? Ik denk het niet, want we kunnen de zon niet met een ander ding in contact brengen.

Laat ik mij dus beperken tot kleine voorwerpen, die ik met gemak kan optillen en met elkaar in aanraking kan brengen, bv. lucifers. Ik neem twee brandende lucifers, blaas ze uit en breng ze met elkaar in aanraking. Als ik de niet gloeiende einden met elkaar in aanraking breng, vindt er geen (of bijna geen) warmte-overdracht plaats, maar als ik het gloeiende einde van de ene lucifer bij het koude einde van de andere breng, wordt er wel warmte overgedragen. Het begrip 'dezelfde temperatuur hebben' is dus op deze lucifers niet van toepassing. Inderdaad hebben onze lucifers (net als de zon) geen bepaalde temperatuur.

We zullen ons dus, als we ekwivalentieklassen willen definieren, moeten beperken tot voorwerpen, die in temperatuur-evenwicht zijn.
Als we twee van die voorwerpen met elkaar in aanraking brengen, kunnen we zien, of er warmteoverdracht is of niet.
Maar hoe zien we, of een lichaam in temperatuur-evenwicht is? We kunnen bijvoorbeeld de temperatuur van verschillende delen van het lichaam meten en vergelijken. En hoe zien we, of er warmte-overdracht plaats vindt of niet? Door te kijken of de temperatuur van het ene lichaam stijgt en die van het andere daalt. We zien dus: Om de definitie van Vredenduin toe te passen, moet men het begrip temperatuur al hebben!
Zo is het in de natuurkunde meestal. Als men een grootheid wil meten, moet men de natuurwetten kennen, waaraan het meetinstrument gehoorzaamt, en in die natuurwetten komt de grootheid voor die men meten wil. Om bv. de massa van Jupiter te bepalen moeten we de wetten van Newton kennen, en in die wetten komt het begrip massa voor. Men kan het begrip massa niet door een bepaalde meetmethode definiëren, maar alleen door het hele stelsel van de natuurwetten, waarin het begrip voorkomt.
Met het meten van temperaturen is het net zo. Dr. Vredenduin wil die meting zo definiëren:
'Breng achter de kwikkolom een schaalverdeling aan, die als volgt geconstrueerd wordt. Breng de kwikkolom in contact met smeltend ijs en zet bij het uiteinde het getal 0. Breng de kolom in contact met kokend water en zet bij het uiteinde het getal 100. Breng verder een evenredige schaalverdeling aan', etc.
Deze methode, temperaturen te meten, geeft inderdaad een bruikbare benadering, maar als definitie van de temperatuur kan deze benadering niet dienen, want de uitzettingscoëfficiënt van kwik is niet nauwkeurig constant.
Wat is de conclusie? Laten we niet proberen, begrippen uit de verzamelingsleer zoals 'ekwivalentieklassen' op de natuurkunde toe te passen. Deze begrippen zijn te nauwkeurig: ze passen alleen op streng gedefinieerde, wiskundige objecten, Wanneer we physica doceren, laten we dan het begrip 'temperatuur' op ouderwetse, huiselijke wijze introduceren, en niet over 'ekwivalentieklassen' spreken.
Hoe zullen we het nu in de wiskundeles doen? Voor hoeken, lijnstukken etc. zou men de definities van Vredenduin kunnen geven, maar dan zou de kloof tussen wiskunde en natuurkunde alleen maar groter worden. Onder onze leerlingen hebben we ook toekomstige physici en ingenieurs, die de begrippen hoek, lijnstuk etc. later op instrumenten en machines zullen toepassen. Laten we dus in de wiskundeles de begrippen lengte en hoekmaat maar net zo ouderwets en huiselijk uitleggen als de natuurkundeleraar de begrippen massa en temperatuur.
Misschien is Dr. Vredenduin het met deze conclusie wel eens. Hij zegt immers zelf: 'We kunnen de ekwivalentieklassen overslaan en direct aan elk lijnstuk een getal toekennen . . . In de schoolwiskunde zullen we dat zeker doen'.
Samenvattend kunnen we zeggen, dat de ekwivalentieklassen in de natuurkunde niet van toepassing en in de meetkunde ook volgens Dr. Vredenduin

onnodig zijn. Dr. Vredenduins conclusie 'Deze soort begripsvorming is in de praktijk zeer algemeen' lijkt mij niet gerechtvaardigd. Men is tegenwoordig te veel geneigd, begrippen uit de moderne wiskunde ook daar in te voeren, waar ze niet op hun plaats zijn.

Naschrift

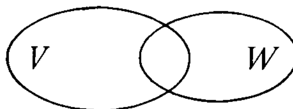
Het artikel over grootheden heb ik geschreven tijdens het werk van de nomenclatuurcommissie met de bedoeling enkele passages uit het rapport van de commissie toe te lichten. Ik geef direct toe, dat de analyse van de erin voorkomende fysische begrippen het voorwetenschappelijke stadium niet of nauwelijks overschrijdt. Tot een diepgaande analyse van fysische begrippen voel ik mij niet in staat. Ik dacht, dat juist in dit voorwetenschappelijke stadium de vorming van ekwivalentieklassen een rol speelt en ben met Prof. van der Waerden eens, dat bij verdere ontwikkeling van het wetenschappelijk denken deze ekwivalentieklassen als zodanig weer verloren gaan. Zo leert het kind bijvoorbeeld de kleuren kennen en benoemen met blauw, rood, geel enz. door middel van de vorming van ekwivalentieklassen geïnduceerd door de ekwivakentierelatie 'gelijkenis vertonen'. In de latere ontwikkeling van de wetenschap vindt men hier niets van terug en is zelfs de relatie 'gelijkenis vertonen' geen ekwivalentierelatie meer. Mijn analyse van het temperatuurbegrip overschrijdt de kennis niet die ik had als hbs-leerling. Ik meende dat deze primaire analyse toch van belang kon zijn, omdat de latere begripsvorming er uiteindelijk op gebaseerd is en omdat de analogie met de wiskundige begripsvorming hier nog het duidelijkst blijkt.
Na het schrijven van mijn artikel is Freudenthal's Educational Studies in Mathematics verschenen. Wie zich voor grootheden interesseert, raad ik aan hierin na te lezen wat de auteur erover geschreven heeft. Men vindt het op blz. 199 e.v. Wat hier gezegd wordt, graaft weer dieper dan wat ik gezegd heb. Hoewel ik van mening ben dat ook hier het laatste woord over grootheden nog niet gezegd is. Het blijft een moeilijke opgave de betekenis van deze term te precizeren.

P.G.J. Vredenduin

Het Nomenclatuurrapport en de m.a.v.o.-examens

Ten gerieve van de docenten die kandidaten opleiden voor de m.a.v.o.-examens, volgt hieronder een opsomming uit het Rapport van de Nomenclatuurcommissie van datgene wat in het bijzonder betrekking heeft op de voor deze examens voorgeschreven leerstof.
Het artikel wordt besloten met enkele praktische wenken.

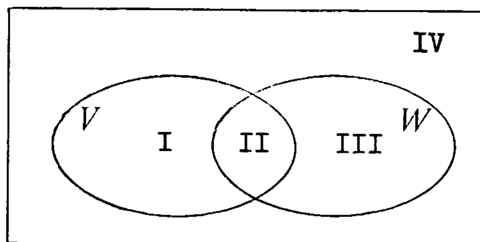
De circulaire AVO 74-11 van 1 februari 1974 geeft informatie die van belang is voor de komende eindexamens m.a.v.o. voor wat betreft het vak wiskunde. Zoals in de circulaire AVO 73-13 van 5 februari 1973 reeds in uitzicht werd gesteld, zal de redactie van de eindexamenopgaven met ingang van 1974 vrijwel in overeenstemming zijn met het Rapport van de Nomenclatuurcommissie, ingesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
De circulaire AVO 74-11 vermeldt nauwkeurig in welk opzicht van dit rapport zal worden afgeweken: 'om technische redenen zullen vectoren niet door vetgedrukte letters worden aangegeven, maar evenals voorheen door een streepje boven de kleine letter of een pijltje boven de hoofdletters. Ook zullen de symbolen $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Z}^+$ en $\mathbb{Z}^-$ in de examenopgaven gebezigd blijven. De nadruk wordt erop gelegd dat het getal 0 geen element van deze verzamelingen is, echter wel van de verzameling $\mathbb{N}$.'
Aangenomen mag worden dat alle wiskundeleraren studie hebben gemaakt van het belangrijke rapport, dat door de goede zorgen van de NVWL aan alle scholen werd toegestuurd (Euclides 48e jrg no 8).
Het zal de lezer ervan opgevallen zijn dat het rapport 'tussen de regels door' verschillende voor de praktijk van het onderwijs behartigenswaardige opmerkingen maakt.
Zo veroordeelt het notaties als {vierkanten} of {alle vierkanten} voor de verzameling van alle vierkanten.
Het wijst erop dat de figuur



wel, en de figuur



geen venndiagram is.
De Britse logicus John Venn (1834-1923) stelde zijn diagrammen op om er bewijskracht aan te ontlenen bij het aantonen van het al of niet juist zijn van uitspraken over verzamelingen in het algemeen.
Daartoe is het essentieel het vlak in vier delen I, II, III en IV te verdelen,



voor de elementen waarvan geldt:

I : $\{x \mid x \in V \wedge x \notin W\}$,
II : $\{x \mid x \in V \wedge x \in W\}$,
III: $\{x \mid x \notin V \wedge x \in W\}$ en
IV: $\{x \mid x \notin V \wedge x \notin W\}$.

Voor uitvoerigere beschouwingen over het gebruik van venndiagrammen wordt verwezen naar hoofdstuk 4.3.8 van het eerste deel van Dr. Joh.H. Wansink, Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren, uitgegeven bij Wolters-Noordhoff.

In het volgende wordt de aandacht gevestigd op die onderdelen van het rapport, die voor de m.a.v.o.-kandidaten van belang zijn.

Geordende getallenparen worden, zoals bekend, aangegeven met behulp van ronde haken: (a, b). Als vooraf vermeld is dat met het geordende paar (x, y) bedoeld wordt $x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$, kan een relatie zoals $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + 4y = 7\}$ korter aangeduid worden door $\{(x, y) \mid 3x + 4y = 7\}$. Bij de examenopgaven is dit als regel het geval.
Bij gesloten intervallen worden vierkante haken gebruikt, bij open intervallen gebroken haken. Zo stelt $[3, 10]$ het gesloten interval $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 10\}$ voor en $\langle 3, 10 \rangle$ het open interval $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 10\}$.
Notaties zoals $[0, \rightarrow\rangle$ voor $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ zullen in de examenopgaven zeer geleidelijk worden ingevoerd.
Men spreekt van de 'veranderlijke' in een vergelijking en niet meer van de 'onbekende'. Het begrip 'oplossingsverzameling van een vergelijking' is gemeengoed geworden, maar het op de 'oude' manier oplossen van bijvoorbeeld een vierkantsvergelijking en dan te volstaan met de conclusie: de oplossingsverzameling (door sommige leraren zelfs afgekort tot O.V.) is ..., gaat aan het wezenlijke ervan voorbij. Beter is de methode gebruikt in het volgende voorbeeld, waarin de oplossing van de vierkantsvergelijking $x^2 + 3x - 4 = 0$ in $\mathbb{N}$ gegeven wordt.

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\} &= \{x \in \mathbb{N} \mid (x + 4)(x - 1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x = -4 \vee x = 1\} \\ &= \{1\}\end{aligned}$$

De termen 'vals' en 'identiek' zijn overbodig geworden.
De begrippen 'strijdigheid' en 'afhankelijkheid' kunnen echter niet gemist worden. Men leze nog eens na wat het rapport over dit alles in paragraaf 4.2 schrijft.

Bij vergelijkingen en functies komen de woorden lineair en kwadratisch te vervallen. Zij worden vervangen door de woorden eerstegraads en tweedegraads.
Van belang is het te weten dat het woord 'functie' in een wat ruimer kader geplaatst is. Bij de spiegeling bijvoorbeeld hebben we te maken met een functie van het vlak naar zichzelf. Aan de notatie $x \to f(x)$ moet daarom worden toegevoegd van welke verzameling naar welke verzameling deze afbeelding plaatsvindt.
Vaak zal dit zijn van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. De woorden 'functie' en 'afbeelding' zijn synoniemen. Het woord 'transformatie' wordt vervangen door het woord 'afbeelding'. Aanpassing van de in het rijksleerplan gebezigde nomenclatuur aan die van de nomenclatuurcommissie is in voorbereiding.

De schrijfwijze $x \to f(x)$ van V naar W houdt niet in dat V het domein van de functie is. Het domein is een deelverzameling van V (en kan dus de verzameling V zijn). Indien het domein niet apart vermeld wordt, betekent dit dat het domein bestaat uit alle elementen van V waarvoor $f(x)$ betekenis heeft. In dit geval kan dus gevraagd worden naar het domein van de functie. Zo moet bij de functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, gedefiniëerd door $f(x) = \frac{1}{x}$, het antwoord op deze vraag luiden: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, of een daarmee ekwivalente omschrijving.
In examenopgaven wordt het domein vaak uitdrukkelijk gegeven.

Voor de afbeeldingen in de vlakke meetkunde biedt het bovenstaande de mogelijkheid nog beter dan voorheen het inzicht van de leerlingen te verhelderen.
Bij de voor de leerlingen vaak zo moeilijke vermenigvuldigingsafbeelding hebben we te maken met een afbeelding f van V naar V, waarin indien V als coördinatenvlak is ingericht en het punt (0, 0) het centrum en $k \in \mathbb{R}$ de factor van de vermenigvuldiging is, het f-beeld van het punt (a, b) het punt (ka, kb) is. Belangrijk is, dat de leerlingen leren inzien dat de afbeelding er een is van V naar V en aan elk uit V gekozen origineel een beeld in V koppelt.
Ook voor de rotaties, spiegelingen en translaties is het ontwikkelen van het juiste inzicht door een dergelijke wijze van behandelen aanbevelenswaardig.
Het zal duidelijk zijn, waarom in de examenopgaven een omschrijving zoals: Bij spiegeling in de lijn l is het punt P' het beeld van het punt P, de voorkeur verdient boven: Het punt P wordt gespiegeld in l en heeft het punt P' als beeld.

De toevoeging 'van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$' komt bij veel van de in examenopgaven voorkomende functies de leesbaarheid voor de kandidaten niet ten goede. Het is daarom zinvol af te spreken dat als deze toevoeging ontbreekt, een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ wordt bedoeld.

De nomenclatuurcommissie heeft ook eenheid trachten te brengen in de wijze van aanduiden van figuren en hun maatgetallen.

Punten worden aangeduid met hoofdletters, lijnen met kleine letters en vlakken met hoofdletters, zonodig voorafgegaan door de soortnaam: het punt *P*, de lijn *l* en het vlak *V*.
Met 'het lijnstuk *AB*' wordt de figuur, het 'plaatje' bedoeld. Met '*AB*' wordt 'het maatgetal van de lengte van het lijnstuk *AB*' bedoeld.

Evenzo: 'driehoek *ABC*' of 'ΔABC' is de naam voor de figuur, '*ABC*' duidt de oppervlakte ervan aan.
'Hoek *A*' duidt weer de figuur aan, terwijl met '$\angle A$' de grootte van de hoek bedoeld wordt. Men mag dus niet zeggen: bereken hoek *A*, wel: bereken de grootte van hoek *A*, of korter (geschreven): bereken $\angle A$.
Tenslotte iets over het door de commissie gemaakte onderscheid tussen cirkel en cirkelschijf.
Met de cirkel (*M, r*) wordt een gesloten lijn bedoeld, met de cirkelschijf (*M, r*) het door de cirkel begrensde vlakdeel. De cirkel heeft een omtrek, de cirkelschijf bezit een omtrek en een oppervlakte.

Tot zover het rapport.

Nu de examens enkele jaren volgens het nieuwe examenprogramma zijn afgenomen blijkt het nuttig te zijn op enkele zaken de aandacht te vestigen.

1 Het verdient aanbeveling dat de kandidaten hun tekeningen en grafieken maken op papier dat bedrukt is met een indeling in vierkante centimeters. Toelaatbaar is ook het z.g. 5 mm ruitjespapier. Ontraden wordt het gebruik van millimeterpapier. De wiskundeleraren doen er goed aan zich ervan te vergewissen dat tijdens het schriftelijk examen het aanbevolen papier inderdaad in de examenzaal aanwezig is: het is voorgekomen dat abusievelijk papier met langwerpige rechthoeken werd verstrekt, met alle gevolgen van dien.
2 Het is goed de kandidaten te wijzen op het onderscheid tussen opdrachten zoals 'Bereken' en 'Bereken in . . . decimalen nauwkeurig'.
3 a Wordt gevraagd sin 60° te berekenen, dan is het antwoord $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en niet 0,8660.
b Wordt gevraagd te bewijzen dat de grootte van een hoek 60° is en maakt de kandidaat daarbij gebruik van de sinus, dan kan hij het bewijs niet met behulp van het getal 0,8660, maar wel met behulp van het getal $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geven.
c Het in de loop van een berekening benaderen van vierkantswortels of goniometrische verhoudingen met behulp van een rekenliniaal of tabel, kan de nauwkeurigheid van het eindantwoord in ongunstige zin beïnvloeden.
d De opdracht 'Bewijs dat de grootte van de hoek tegenover de grootste zijde van een driehoek, waarvan de zijden resp. de lengten 3, $\sqrt{2}$ en $\sqrt{17}$ hebben, 135° bedraagt', kan onmogelijk met behulp van rekenliniaal of tabel worden uitgevoerd.

Verslag

van de commissie in 1973 belast met het afnemen van het examen bedoeld in artikel 12, der hoger-onderwijswet: Staatsexamen Gymnasium A en B

Wiskunde

De subcommissie voor de wiskunde moest helaas constateren dat vele kandidaten zich onvoldoende op het examen hadden voorbereid. Ook nu weer kenden vele A-kandidaten de cosinus-regel niet.
Bij het onderdeel 'analytische meetkunde' van de B-kandidaten bleek o.a. dat de letter λ synoniem geacht werd met het begrip elimineren, wat de betreffende kandidaten bij de onderwerpen 'cirkelbundels' en 'lijnenbundels' voor grote problemen stelde. Ook was een aantal kandidaten niet voldoende op de hoogte van de oplosmethoden van de goniometrische vergelijkingen.
Het gemiddelde van de door de A-kandidaten behaalde cijfers voor algebra bedraagt dit jaar 4,9 en voor meetkunde 4,9. De gemiddelden voor deze vakken waren resp. 5,0 en 5,1.
De gemiddelden van de cijfers voor de B-kandidaten waren dit jaar als volgt: voor algebra 5,7 (vorig jaar 5,8); voor stereometrie 6,0 (vorig jaar 5,7) en voor goniometrie en analytische meetkunde 5,6 (vorig jaar 5,6).

Verslag

van de commissie in 1973 belast met het afnemen van de Staatsexamens H.A.V.O., bedoeld in artikel 60, eerste lid van de Wet op het voortgezet onderwijs

Wiskunde

Het niveau der kandidaten was laag te noemen. Enkele opmerkingen ter verduidelijking:
1e. Het verband tussen de afgeleide in een punt en de raaklijn was niet altijd duidelijk. Inzicht in deze materie ontbrak.
2e. Het tekenen van de grafiek van een functie ging niet altijd volgens de geijkte methode: nulpunten werden niet bepaald, het tekenverloop van de afgeleide functie werd niet ter sprake gebracht.
3e. Existentievoorwaarden werden vrijwel nooit vermeld.
4e. De kennis van elementaire goniometrische functies was zeer ontoereikend; goniometrische formules waren niet bekend. Het oplossen van eenvoudige goniometrische vergelijkingen was voor veel kandidaten te moeilijk om nog maar te zwijgen over ongelijkheden.
5e. Voor de kandidaten is meer kennis van het meetkundige gedeelte vereist. Het ondervragen over méér dan elementaire begrippen zou de eindcijfers ongunstig beïnvloed hebben.
6e. De interpretatie van, en het werken met grafieken, was van onvoldoende gehalte.

Over de kandidaten nog het volgende:
1e. Zij die volgens het moderne programma waren opgeleid wisten nauwelijks iets van statistiek en kansberekeningen, terwijl hun kennis van de meetkunde met vectoren zeer gebrekkig was.
2e. Enkele kandidaten wisten niet of ze volgens het oude of volgens het nieuwe programma waren opgeleid; sommige kandidaten waren zelfs niet op de hoogte met het eindexamenprogramma. (Op de opdracht: differentieer de functie $f(x) = x^3 - 3x^2$ werd geantwoord: dat heb ik nog nooit gedaan, ik weet niet wat een afgeleide is).
Wij raden de kandidaten aan te zorgen op de hoogte te zijn van het programma. Hopelijk zal dit leiden tot een plezieriger verloop van de eindexamens.

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1973

Tweede ronde, 18 september 1973, 14.00-17.00

1 Van de gegeven driehoek ABC heeft hoek C de grootte 60°; het midden van de zijde AB heet R.
a Er bestaan een punt P op de lijn BC en een punt Q op de lijn AC zo, dat de omtrek van driehoek PQR minimaal is. Bewijs dat en geef ook aan, hoe die punten P en Q geconstrueerd kunnen worden.
b De in a genoemde minimale omtrek van driehoek PQR is gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{(3c^2 + 6ab)}$, waarin a, b en c opvolgend de lengten van de zijden BC, CA en AB van driehoek ABC voorstellen. Bewijs ook dat.
2 Bewijs dat de onderstaande bewering voor elke gehele, positieve n waar is:
Er bestaat precies één rij van $(2n+1)$ opvolgende natuurlijke getallen zo, dat de som van de kwadraten van de eerste $(n+1)$ van die getallen gelijk is aan de som van de kwadraten van de laatste n van die getallen.
Druk ook het kleinste getal van die rij in n uit.
Voorbeeld voor $n = 1$: de rij 3,4,5 ($3^2+4^2 = 5^2$)
Voorbeeld voor $n = 2$: de rij 10,11,12,13,14 ($10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2$)
3 Driehoek ABC is gelijkbenig; zijn basishoeken A en B hebben de grootte van 40°. Binnen driehoek ABC ligt punt P zo, dat hoek PAB gelijk is aan 30° en hoek PBA gelijk is aan 20°. Bereken zonder een tabel te gebruiken de grootte van hoek PCA.
4 Van een oneindige rij reële getallen

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

is gegeven:

$$x_{n+1} = \sqrt{(x_n - \tfrac{1}{4})}$$

geldt voor elke natuurlijke n, en bovendien $x_0 \neq \frac{1}{2}$.
a Bewijs, dat $x_n > \frac{1}{2}$ voor elke natuurlijke n geldt.
b Bewijs, dat $\lim_{n\to\infty} x_n$ bestaat; bereken deze limiet.
5 Van een oneindige rij gehele getallen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

is het volgende gegeven:

$a_1 = 0$ en verder geldt voor elk rangnummer N, dat
$a_{N+1} = a_N - N$ als $a_N \geqslant N$ en $a_{N+1} = a_N + N$ als $a_N < N$.

a Bewijs dat er oneindig veel getallen uit de rij gelijk zijn aan 0.
b Druk in k uit het rangnummer van het k-de getal uit de rij, dat gelijk is aan 0.

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

The Mathematics Teacher, LXV-LXVI, december 1972-mei 1973.

E.R. Ranucci, Topology through the alphabet;
R.L. Elkins and W.A. Wockenfuss, Graphical methods for the pre-engineering und science student;
M. Manchester, Decimal expansions of rational numbers;
E.M. Maletsky, Manipulating magic squares;
A. Day Bradley, The three-point problem;
D.M. Shafer, An action seminar in mathematics education,
C.E. Stengel, A look at regular and semiregular polyhedra;
J.A. Dossey, What? – a roller with corners;
W.J. Zimmerman, Maxima and minima by algebraic methods;
M. Smith, Discovering a congurence theorem;
J.W. Lee, Changing bases by direct computation;
L.A. Morgan, Areas by infinite series;
M. Fabricant, A classroom discovery in highschool calculus.

D.A. Johnson e.a.; A new statement of purpose;
E. Glenadine Gibb e.a., The computer in secondary mathematics;
R.A. Gibbs, Euler, Pascal and the missing region;
S.J. Lipsey and W. Snow, The appreciation of radian measure in elementary calculus;
A. Morley, Mathematics as 'process';
A.B. Dittrich, An experiment in teaching the history of mathematics;
L.C. Bolster, Napier's bones;
L. Raphael, In search of the perfect scalene triangle;
J. Niebaum, Numerical solution of linear equations;
J.A. McIntosh, Determining the area of a parabola.

R. Munger, An algebraic treatment of magic squares;
Ch. W. Trigg, Collapsible models of isosceles tetrahedrons;
S.W. Abbas, Some investigations of n-dimensional geometries;
W.J. Himmelberger, Puzzle problems and diophantic equations;
J.O. Parker. A proof of the remainder theorem;
Ch.E. Allen, Mission-tangrams;
Br.J. Alpart, Auxiliary lines, a testing problem;
J.R. Westwood, Construction of a slide rule with compass and straightedge;
N. Woo, A generalized base for integers;
D.R. Duncan e.a., Trigonometric ratios, algebraic or transcendental;
K.O. May e.a., Some algebraic equations do not have exactly *n* roots.

M.G. Epstein and J.W. Wilson, Do standardized tests measure the wrong thing?
G. Vervoort, Inching our way toward the metric system;
R. Willcutt, Path on a grid;
S. Weiss, Teaching mathematics to the disadvantaged;
D.L. Burdik, The empirical foundations of probability theory;
L. Raphael, The shoemaker's knife;
St. R. Clemens, Fixed point theorem in euclidean geometry;
J. Ocrant, A guide to mathematical discovery;
L.H. Brown, Discovery of formulas through patterns;
L. Carey-Bolota, Tessalations;
H. Hemmerley, Polyhedral numbers.

G.G. Brown e.a., Some probability problems concerning the game of bingo;
G.L. Musser, A transcendental machine;
B.B. Hughes, Mathematical education in Basel;
D.M. Peck e.a., Providing advantage to the disadvantaged;
E. Einhorn, A method for approximating the value of π;
B. Bompart, Teaching concepts incorrectly;
J.K. Bidwell, Pascal's triangle revisited;
Th.J. Brieske, Functions, mappings and mapping diagrams;
H. Vernon Price. The organization, the goals and some activities of the National Council of Teachers of Mathematics.

UIT DE NIAM-AANBIEDING SOFTWARE APRIL 1974

Nieuwe 'Korte Super 8 films'

Wiskunde: Gebruik tekenmateriaal.

		min.	kl/z.w.	Prijs
8F 264	Lineal	3	z/w	*f* 32,90
8F 265	Geodreieck	3	z/w	*f* 27,20
8F 266	Zirkel	3	z/w	*f* 29,10
8F 267	Geodreieck als Winkelmesser	3	z/w	*f* 29,10
8F 268	Lineal und zeichen Dreieck	3	z/w	*f* 34,57
8F 269	Lineal und Zirkel	3	z/w	*f* 29,10

De aangesloten en belangstellende scholen krijgen op de vermelde prijs 10% korting.
Adres: Nederlands Instituut voor Audio-visuele Media, antwoordnummer 818, 's Gravenhage.

Boekbespreking

Z.A. Melzak, *Companion to concrete mathematics: mathematical techniques and various applications,* a Wiley-interscience publication, John Wiley & Sons, New York, Londen, Sydney, Toronto, 1973, XIII + 270 pag., geb. £ 7.50.

De schrijver bespreekt in dit boek een groot aantal gevallen, waarin toepassing van analytische methoden uitkomst biedt bij het oplossen van problemen op velerlei gebied. Hij ziet, naar ik begreep, de toepassingsmogelijkheden van de analyse op concrete vraagstukken vooral uit didactisch oogpunt als van zeer groot belang. Bij hem groeide de overtuiging dat 'separating calculus from geometry, combinatorics, probability, etc., is decidedly unhealthy and that it is downright sinful to teach the abstract before the concrete'.
Het is verbazingwekkend hoeveel problemen van zeer uiteenlopende aard zijn behandeld en bij vrijwel elk onderwerp valt op dat de auteur beschikt over een respectabel arsenaal van methoden en speciale handigheidjes om de vraagstukken te lijf te gaan. Het boek leent zich daardoor bij uitstek om het zo eens door te bladeren en telkens een bepaald gedeelte dat dan opvalt onder de loep te nemen. Ook bij eenvoudige stellingen, uit de stereometrie van de (vroegere) middelbare school b.v., is vaak iets in de oplossing gelegd dat net buiten het 'gewone' valt, dat deze bekort, dat ook wel eens generaliseert en dat in ieder geval ons telkens weer doet beseffen, hoeveel ook esthetisch genoegen de wiskunde ons kan doen beleven.

J.W. Lenstra sr

Raymond Broeckx, *Analyse* 2, Wiskunde De Rij 61, De Nederlandsche Boekhandel, Antwerpen/Utrecht 1973, 367 blz., BF 250.

Het boek is bestemd voor de hoogste klasse van het secundair onderwijs.
Het bestaat uit vier hoofddelen: rijen en reeksen, exponenten en logaritmen, differentialen en integralen, differentiaalvergelijkingen. Opvallend is, dat men vrij ver gaat met de behandeling van de leerstof.
Verschillende onderwerpen waarmee in ons land de student in zijn eerste academisch jaar pas kennis maakt, worden hier reeds in het secundair onderwijs geïncorporeerd. Om enkele voorbeelden te noemen: rijen van hogere orde, convergentiekenmerken, reeksontwikkelingen, machtreeksen, convergentiestraal, terwijl ook de techniek van het integreren en het oplossen van differentiaalvergelijkingen wat verder nog doorgevoerd wordt dan bij ons.
Bij de ontwikkeling van de analyse streeft men een hoge graad van strengheid na. Bewijzen van 'evidente' eigenschappen worden niet overgeslagen. Soms zou dit wat te ver voeren, maar dan wordt expliciet de stelling vermeld en het bewijs weggelaten of geschetst. Het begrip bepaalde integraal wordt ontwikkeld volgens de methode van Riemann.
Aan techniek en aan wiskundige strengheid wordt dus veel zorg besteed. Jammer is, dat de begripsvorming niet altijd even scherp geschiedt. Ik denk hier met name aan de fundering van begrippen als rij, reeks, differentiaal, onbepaalde integraal.

P.G.J. Vredenduin

Annals of systems research (volume 2, 1972)

De 'Systeemgroep Nederland' is een interdisciplinaire organisatie die al diegenen bijeen tracht te brengen die in de systeemleer en zijn toepassingen geïnteresseerd zijn.* Als zodanig vinden economen, psychologen, wiskundigen, biologen en vele anderen er een stimulerend ontmoetingsterrein. De Annals of Systems Research vormen het jaarlijks uitgegeven orgaan.
De opgenomen artikelen variëren van algemene, vaak verbaal gepresenteerde, beschouwingen over doel en aanpak van de systeemleer als geheel, tot zeer specifieke modellen en technieken. Dit nummer besteedt daarbij aandacht aan modellen op het gebied van de sociale planning en organisatie, de werktuigbouw, de politicologie, de forensische psychiatrie en de biologie, en bevat verder een tweetal algemene theoretische artikelen. Een daarvan gaat over het toepassen van analytische methoden op het gebied van informatie systemen, het andere is een geslaagde poging een algemene conceptie van systeemmodellen te formuleren en deze toe te passen op verschillende gebieden. Het beslissingsmodel is daarbij wel het boeiendst.
Voor allen die belang stellen in modelstudies is dit jaarboek het lezen waard.

* Inlichtingen betreffende de Systeemgroep Nederland kunnen worden verkregen bij de secretaris, G. de Zeeuw, afd. Methodologie van de Universiteit van Amsterdam.

A.A. Verrijn Stuart

A.F.G. Hanken, H.A. Reuver, *Inleiding tot de systeemleer,* Stenfert Kroese, Leiden, 1973, f 24.

De algemene systeemleer 'onderzoekt de toepasbaarheid van de mathematische modellen, die in de vakwetenschappen gebruikt worden bij de analyse van reële systemen als gestructureerde gehelen in de concrete werkelijkheid.'
Ik geef eerst een overzicht van de inhoud van dit boek.
Na een inleidend hoofdstuk wordt een zeer algemeen metasysteem geformuleerd. Door structuurspecificatie wordt hieruit een aantal specifieke systemen afgeleid. Dit zijn eenvoudige modellen, ontleend aan de natuurkunde, waarschijnlijkheidsrekening, statistiek, besliskunde, economie en ecologie. Binnen het referentiekader van het metamodel worden zij vergeleken en geclassificeerd. In hoofdstuk 2 worden descriptieve en in hoofdstuk 3 normatieve systemen besproken.
Hoofdstuk 4 is gewijd aan de modelcyclus. Deze valt uiteen in de fasen abstractie, deductie en realisatie. De eerste fase omvat de probleemanalyse en de modelconstructie; hier worden de theorie van het meten en de methoden van identificatie behandeld. In de volgende fase vindt de systeemanalyse plaats. De laatste fase kent twee stadia: de validatie (die leidt tot confirmatie of falsificatie van het model) en de implementatie.
In hoofdstuk 5 worden twee systemen van grotere omvang beschreven, nl. een model van de mens als beslisser en een integraal bedrijfsmodel.
Aan het eind van het boek vindt men 23 vraagstukken, een literatuurlijst en een trefwoordenlijst.
Dit boek is bedoeld als een handleiding voor iedereen die in de praktijk met systemen en modellen te maken heeft. Het biedt veel informatie binnen een compacte en systematische opzet. Het taalgebruik doet soms enigszins afbreuk aan de leesbaarheid; de eerste alinea van deze recensie mag als voorbeeld dienen. Verder doet het vreemd aan woorden als *constraint, decisie* en *distributie* tegen te komen waar juist in de 'vakwetenschappen' de woorden *beperking, beslissing* en *verdeling* gebruikt worden.
Tenslotte een opmerking over deze 'nieuwe wetenschap'. De systeemleer is een specialisme voor 'generalisten'. Door modellen en hun praktische toepassingen te classificeren en te vergelijken probeert zij een 'medium voor interdisciplinaire communicatie' te ontwikkelen. Het wordt echter niet duidelijk wat de algemene systeemleer kan bijdragen tot de systematische constructie en analyse van specifieke modellen.

J.K. Lenstra

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

/

315. Is het mogelijk, dat

$$(A \cap X) \cup (B \cap Y) = A \qquad (1)$$
$$(B \cap X) \cup (A \cap Y) = B \qquad (2)$$
$$(A \cup X) \cap (B \cup Y) = X \qquad (3)$$
$$(B \cup X) \cap (A \cup Y) = Y \qquad (4)$$

en zo ja, hoe? (A. van Setten)

316. A en B bevinden zich in een plat vlak op een afstand van 100 m van elkaar. A beweegt zich in dit vlak voort met een snelheid van 1,2 m/sec., B met een snelheid van 1 m/sec. Hun snelheden zijn constant van grootte, maar hoeven niet constant van richting te zijn. A moet proberen B te vangen (door op dezelfde plaats als B te komen). Als beide optimaal slim zijn, is het dan voor B mogelijk A te blijven ontwijken? En zo niet, na hoeveel tijd slaagt A erin B te vangen?

Oplossingen

313. Uit een verzameling met 12 elementen kiezen we deelverzamelingen met 5 elementen waarvan elk paar precies 2 elementen gemeen heeft. Hoeveel deelverzamelingen kan men zo maximaal vormen?
a. Neem aan dat geen tweetal elementen in meer dan twee deelverzamelingen voorkomt. Noem de elementen 1, 2, . . ., 12. Onderstel de eerste deelverzameling bestaat uit 1, 2, 3, 4, 5. Elke volgende bevat dan precies 2 van deze 5 elementen. Er zijn dus maximaal 10 deelverzamelingen mogelijk. We proberen een realisatie te verkrijgen van 10 deelverzamelingen die aan de eis voldoen. We beginnen, op een permutatie na gedwongen, als volgt:

1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	.	.
1	2	.	.	.	6	7	8	.	.	.	.
1	.	3	.	.	6	.	.	9	10	.	.
1	.	.	4	.	.	7	.	9	.	11	.
1	.	.	.	5	.	.	8	.	10	11	.

Conclusie: komt een element een keer voor, dan komt het 5 keer voor. Komt het element 12 dus in de volgende deelverzamelingen een keer voor, dan komt het 5 keer voor. Het mag met 2, 3, 4, 5 echter elk slechts 2 keer voorkomen. Dus is het niet mogelijk, dat het 5 keer voorkomt.

Het element 12 komt dus niet voor.
In totaal komen dus $5 \cdot 11 = 55$ elementen voor. In 10 deelverzamelingen met elk 5 elementen komen slechts 50 elementen voor. Contradictie.
b. Er is dus een paar dat meer dan 2 keer voorkomt. We gaan nu volgens onderstaand schema te werk. De toelichting volgt daarna.

1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	.	.
1	2	.	.	.	6	7	8	.	.	.	.
1	2	.	.	.	.	.	.	9	10	11	.
1	.	3	.	.	6	.	.	9	.	.	12
1	.	.	4	.	.	7	.	.	10	.	12
1	.	.	.	5	.	.	8	.	.	11	12
.	2	3	.	.	.	7	.	.	.	11	12
.	2	.	4	.	.	.	8	9	.	.	12
.	2	.	.	5	6	.	.	.	10	.	12

Toelichting. Het paar 1 – 2 komt driemaal voor. De eerste drie regels zijn gedwongen (altijd op een permutatie na). We zien nu:
het is niet mogelijk, dat het paar 1 – 2 een vierde keer voorkomt (er waren dan 14 elementen nodig);
het is niet mogelijk, dat in een deelverzameling noch 1 noch 2 voorkomt (de deelverzameling zou dan 6 elementen moeten bevatten).
We gaan nu verder met deelverzamelingen waarin het element 1 voorkomt. We kunnen drie van deze deelverzamelingen vormen, maar niet meer. Immers elke volgende zou met een van de vorige meer dan 2 elementen gemeen hebben. Nu kunnen we nog drie deelverzamelingen vormen waarin het element 2 voorkomt. En dan is het dus afgelopen.
Het aantal deelverzamelingen is dus maximaal 9. Al deze realisaties van 9 deelverzamelingen zijn op een permutatie na dezelfde.
Men zou nog kunnen onderzoeken of er realisaties van 9 deelverzamelingen mogelijk zijn waarvan geen drie deelverzamelingen een zelfde paar gemeen hebben. Ik heb dit niet meer gedaan.

314. Twaalf doosjes bevatten elk vijf verschillend genummerde knikkers. De doosjes zijn genummerd 1 – 12; de knikkers dragen elk een van de nummers 1 – 12. Twee doosjes hebben maximaal twee knikkernummers gemeen. Algemeen geldt: doos a bevat knikker $b \Rightarrow$ de dozen a en b hebben precies twee knikkernummers gemeen. Geef een realisatie.
Neem een regelmatig twintigvlak. Nummer de hoekpunten 1 – 12. Als bijv. de ribben die uit hoekpunt 1 vertrekken gaan naar de hoekpunten 2, 6, 7, 9, 11, dan doen we in doos 1 knikkers met nummers 2, 6, 7, 9, 11. Aan alle voorwaarden is dan voldaan.

INHOUD